Академия наук
Республики Таджикистан
Институт математики

Материалы научной конференции

Математика и информационные технологии

посвященной 15-летию независимости
Республики Таджикистан
(Душанбе, 27 октября 2006 г.)

Д У Ш А Н Б Е – 2006

УДК. 511+512+519. 4, 517. 956, 517. 927

Материалы научной конференции “Математика и информационные технологии” посвященной 15-летию независимости Республики Таджикистан” (Душанбе 27-октября 2006 г.)

В сборнике представлены тезисы докладов, сделанных на конференции “Математика и информационные технологии”посвященной 15-летию независимости Республики Таджикистан проходящий в Институте математики АН РТ. Тематика докладов охватывает широкий спектр проблем алгебры, теории чисел, топологии, теории функции, функционального анализа, дифференциальных уравнений, механики и компьютерной технологии.

Организационный комитет:

1. Усманов З.Д., академик АН РТ(председатель)
2. Илолов М.И. академик АН РТ
3. Михайлов Л.Г. академик АН РТ
4. Рахмонов З.Х. чл.кор. АН РТ
5. Каримов У.Х. канд.физ-мат.наук
6. Нуров И.Д. канд.физ-мат.наук (ученный секретарь)
7. Халилов Ш.Д. канд.физ-мат.наук (зам. председатель)

УДК 517.957

О краевой задаче Римана–Гилберта для квазилинейных эллиптических систем

Байзаев С.
(Таджикский госуниверситет права, бизнеса и политики г.Худжанд)

В настоящем докладе рассматривается краевая задача типа задачи Римана – Гильберта для квазилинейных эллиптических систем первого порядка.

Пусть C – комплексная плоскость, G–единичный круг, а Γ–его граница, $\bar{G} = G + \Gamma$. Функциональные пространства $C_\alpha(G)$, $C^1_\alpha(G)$, $C(\bar{G})$ определяются как в [1].

Постановка задачи. *Найти решение* $w \in C^1_\alpha(G) \bigcap C(\bar{G})$ *квазилинейной эллиптической системы*

$$w_{\bar{z}} = P(z, w) + f(z, w), \tag{1}$$

удовлетворяющее краевому условию

$$Re[\overline{\lambda(t)} w(t)] = c(t) \quad t \in \Gamma. \tag{2}$$

Относительно данных задачи предполагаются следующие: P, f–непрерывны по Гчльдеру по совокупности переменных $(z, w) \in \bar{G} \times C$, P–положительно однородная по w порядка $m > 1$, f принадлежит классу F_m:

$$F_m = \{f = f(z, w): \ |f(z, w)| \le \rho(w^m), \quad \text{где} \quad \rho(r) = o(r) \quad \text{при } r \to \infty\},$$

$\lambda, c \in C(\Gamma)$, $|\lambda(t)| \equiv 1$, $t \in \Gamma$, $|c(t)| \le c_0$, c_0–некоторая известная постоянная. Класс функций $c(t)$ удовлетворяющих последнему неравенству обозначим через C_0. В системе (1) меняя функцию f в классе F_m, а $c(t)$ в классе C_0 получаем семейство задач.

Задача Римана–Гильберта для линейных систем достаточно хорошо исследована (см., например, [1, 2]), в то время как для случая квазилинейных систем вида (1) указанная задача изучена сравнительно мало. В основном, эта задача изучена при условии, что правая часть системы по переменной w при $w \to \infty$ имеет рост не более чем линейный (см., например, [2]). К соответствующим краевой задаче интегральным уравнениям при таких жестких предположениях применимы принцип сжатых отображений или метод монотонных операторов. В рассматриваемом нами случае эти методы не применимы.

Ниже будут приведены условия наличия общих априорных оценок решений задачи (1)–(2), а сама задача будет приведена к нелинейному интегральному уравнению, к которому можно применять топологические методы. Относительно априорных оценок решений задачи (1)–(2) справедлива следующая.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

а) $\forall z_0 \in \bar{G}$ *система* $w_{\bar{z}} = P(z_0, w)$ *не имеет ненулевых ограниченных на всей плоскости решений;*

б) $\forall t_0 \in \Gamma$ *задача*

$$u_{\bar{\zeta}} = -\bar{t}_0 P(t_0, u),\ \ \zeta \in \Pi = \{z:\ Rez > 0\},$$

$$Re[\overline{\lambda(t_0)}u(t)] = 0, \quad t \in L = \{z:\ Rez = 0\},$$

не имеет ненулевых решений, удовлетворяющих условию $\sup|u(\zeta)| \le 1$, $\zeta \in \Pi$. *Тогда существует такая постоянная* R, *независящая от функций* f *и* c, *что для решений всех задач (1), (2) справедлива априорная оценка*

$$\|w\|_0 = \max_{z\in\bar{G}} |w(z)| \le R.$$

Пусть $p(z)$ аналитическая в G, непрерывная в $\bar{G}$ функция, удовлетворяющая условию $Rep(t) = \sigma(t)$, $t \in \Gamma$, где $\sigma(t) = \theta(t) - n\psi$, $\psi = \arg t$ (такую функцию можно взять, например, в виде интеграла Шварца [1]), n–индекс функции λ(t) относительно окружности Γ, $\theta(t)$–одна из непрерывных ветвей функции $\arg\lambda(t)$. Тогда с помощью формулы $\omega(z) = e^{-ip(z)}w(z)$ задача (1), (2) приводится к каноническому виду

$$\omega_{\bar{z}} = F(z, \omega), \quad z \in G, \tag{3}$$

$$Re[t^{-n}\omega(t)] = c_1(t),\ \ t \in \Gamma, \tag{4}$$

$$c_1(t) = e^{p_2(t)}c(t),\ F(z,\omega) = e^{-ip(z)}\left\{P\left[z, e^{ip(z)}\omega\right] + f\left[z, e^{ip(z)}\omega\right]\right\}.$$

Далее задача (3), (4) приводится к нелинейному интегральному уравнению

$$\omega - T\omega = \Phi(z), \tag{5}$$

где $T\omega = P_n[F(\zeta,\omega)]$–вполне непрерывный оператор (см. [1]), $\Phi(z)$–аналитическая функция, удовлетворяющая условию (4) и интегральное уравнение (5) исследуется с помощью топологических методов.

Через B обозначим множество решений задачи (3), (4), через M_Φ–множество решений уравнения (5), а через A–множество аналитических в G функций, удовлетворяющих условию (4). Оказывается имеет место равенство $\mathrm{B} = \bigcup\limits_{\Phi\in \mathrm{A}} \mathrm{M}_\Phi$. Установлено, что если задача (3), (4) при $f = c_1 = 0$ не имеет ненулевых решений, то уравнение (5) имеет по крайней мере одно решение. Отметим, что в этом случае вращение поля, соответствующее уравнению (5) равно единице.

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука. 1988.

2. Differential Equations and Mathematical Physics. Abstr. Int. Symp. Deducate 90-th Birthday Anniv. Acad. I. Vecua. Tbilisi. 1997.

УДК 511.

Короткие нелинейные тригонометрические суммы с простыми числами

Бобоеров Ш.К.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

И.М. Виноградов [1] впервые получил нетривиальную оценку линейной тригонометрической суммы с простыми числами в коротких интервалах, т.е. сумм вида:

$$S(\alpha,x,y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n)e(\alpha n),$$
$$\alpha = a/q+\lambda, \quad (a,q)=1, \quad |\lambda|\le 1/q\tau, \quad 1\le q\le \tau$$

при $y > x^{2/3+\varepsilon}$, $\exp(c(\ln\ln x)^2) \ll q \ll x^{1/3}$. Затем C.B. Haselgrove [2], В. Статулявичус [3], Пан Чен-дон, Пан Чен-бьяо и их ученики [3] и З.Х.Рахмонов [4] доказали нетривиальную оценку суммы $S(\alpha,x,y)$, $y = x^\theta$, q—произвольное соответственно при $\theta = 63/64+\varepsilon$; $279/308+\varepsilon$; $2/3$, $3/5+\varepsilon$.

Примененный в [5] подход в сочетании с работой М.Ютилы о четвертом моменте L - рядов Дирихле в коротких интервалах критической прямой позволили исследовать средние значения функций

$$\psi_2(u,\chi,\lambda) = \sum_{n\le u} \Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n^2),$$

по всем характерам Дирихле данного модуля в коротких интервалах.

Теорема. *Пусть* $x \geq x_0$, $x^{1/2} \leq y \leq x$, $|\lambda| \leq 1/y^2$, $1 \leq q \leq x/y$, ε *– любое фиксированное положительное число,* $\varepsilon \leq 10^{-6}$,

$$t_2(x; q, y, \lambda) = \sum_{\chi} |\psi_2(x, \chi, \lambda) - \psi_2(x - y, \chi, \lambda)|.$$

Тогда справедлива оценка

$$t_2(x; q, y, \lambda) \ll (y + x^{3/10} y^{1/2} q^{1/2}) l^{35} + (q x^{1/2} + x^{2/3} y^{1/2} |\lambda|^{1/3} q) x^{\varepsilon}.$$

Одним из приложений этой теоремы является оценка квадратичной тригонометрических сумм с простыми числами в коротких интервалах, т.е. сумм вида:

$$S_2(\alpha, x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^2),$$
$$\alpha = a/q + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq 1/q\tau, \quad 1 \leq q \leq \tau.$$

Следствие. *Пусть* $x \geq x_0$, $x^{1/2} \leq y \leq x$, $|\lambda| \leq 1/q\tau \leq 1/y^2$, ε *– любое фиксированное положительное число,* $\varepsilon < 10^{-6}$. *Тогда справедлива оценка:*

$$S_2(\alpha, x, y) \leq (y q^{-1/2} + x^{3/10} y^{1/2}) l^{36} + (q^{1/2} x^{1/2} + x^{2/3} y^{1/2} \tau^{-1/3} q^{1/6}) x^{\varepsilon}.$$

Эта оценка становится нетривиальной при

$$l^{70} < q < \tau, \quad y \geq x^{4/5+\varepsilon}.$$

Литература

1. Виноградов И.М. — Избранные труды. М: Изд-во АН СССР, 1952.
2. Haselgrove C.B. — J. London Math. Soc., 26(1951), p.273–277.
3. Статулявичус В. — Ученые труды университета. Сер. мат., физ. и хим. наук, Вильнюс, 3 (1955), с.5–23.
4. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao — Chinese Ann. of Math, ser. B, 1990, № 2, p.138–142.
5. Рахмонов З.Х. — Тр. Межд.конф. "Совр.проблемы мат. и механики", посв.175–летию П.Л.Чебышева, МГУ, 1996, с.143–169.

Посвящается памяти
нашего дорогого учителя,
академика АН РТ
Бойматова К.Х.

УДК 517.946

Спектральная асимптотика несамосопряженных систем дифференциальных операторов

Гадоев М.Г., Егоров И.Е.
(г. Мирный, МПТИ (ф) ЯГУ; г. Якутск, ИМ ЯГУ; Россия)

В докладе речь идет об асимптотической формуле для функции распределения собственных значений несамосопряженного псевдодифференциального оператора $\mathcal{A}_p$-замыкания в $\mathcal{H}_{p,k} = L_p(R^n; k(x))^l$, оператора

$$(Au)(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} (\int\limits_{R^n} e^{is(x-y)} a(\tau x + (1-\tau)y, s) u(y) dy) ds,$$

$$D(A) = C_0^\infty (R^n)^l, \quad 0 \le \tau \le 1.$$

Пространство $\mathcal{H}_{p,k}$, $1 \le p < +\infty$ состоит из вектор-функций (в.-ф.) $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_l(x))'$ с конечной нормой

$$|u|_{p,k} = (\sum_{j=1}^{l} \int\limits_{R^n} k^p(x) |u_j(x)|^p dx)^{1/p}.$$

Пространство $\mathcal{H}_{\infty,k}$ определяется как класс в.-ф. $u(x) \in C(R^n)$ таких, что $|u(x)|k(x) = o(1)$, $x \to +\infty$, с нормой

$$|u|_{\infty,k} = \sup_{x \in R^n} \sup_{j=\overline{1,l}} k(x) |u_j(x)|.$$

Относительно весовой функции $k(x)$ предполагается выполнение условия

$$k(x) k^{-1}(y) \le M(1 + |x-y|^N), \quad M, N > 0.$$

При тех условиях на символ $a(x, s)$, при которых исследуется оператор $\mathcal{A}_{p,k}$, оператор $\mathcal{A}_{2,1}$ будет квази-m-аккретивным оператором, но не обязательно m-секториальным. В литературе опубликовано много работ, посвященных следующей ситуации, когда собственные значения (с.з.) оператора делятся на две серии, одна из которых лежит вне некоторого замкнутого сектора Φ, $\Phi \cap R_+ = \{0\}$, а вторая серия с.з. $\lambda_1', \lambda_2', \ldots$ удовлетворяет условию

$$\lim_{j \to +\infty} arg\, \lambda_j' = 0. \tag{1}$$

При этом с использованием метода контурного интеграла удается получить асимптотическую формулу распределения серии с.з. $\lambda_1', \lambda_2', \ldots$.

В наших рассмотрениях условие (1) может не выполняться. Оператор $\mathcal{A}_{2,1}$ в пространстве $\mathcal{H}_{2,1}$, вообще говоря, не приводится к виду

$$\mathcal{A}_{2,1} = B(E+S), \quad \text{где} \quad B = B^*, \quad S \in \sigma_\infty,$$

т.е. оператор $\mathcal{A}_{2,1}$, вообще говоря, является далеким от самосопряженного. Тем не менее, удается выделить главный член асимптотики функции распределения с.з. оператора $\mathcal{A}_{p,k}$, $1 \le p \le +\infty$, и в частности оператора $\mathcal{A}_{2,1}$.

Сформулируем условия на символ:

$$(1+|s|)^\varepsilon (1+|x|)^\varepsilon \le M a'(x,s),$$

$$|D_x^\beta D_s^\alpha a(x,s)| \le M a'(x,s)^{1-\theta|\alpha|}, \quad \alpha + \beta \ne 0,$$

где $a'(x,s)$ обозначает нижнюю грань матрицы $Re\, a(x,s)$, $\varepsilon, \theta > 0$.

Если $p = 1$ или $p = +\infty$, то семейство функций

$$\Omega_{\eta,t}(x) = \int_{R^n} e^{isx} e^{-ta(\eta,s)} ds, \quad 0 < t < 1,\, \eta \in R^n$$

образует ограниченное множество в пространстве $\mathcal{H}_{1,1}$.

При $p \ne 2$ дополнительно предполагается, что

$$|s|^{|\gamma|} |D_s^\alpha D_s^\gamma D_x^\beta a(x,s)| \le M_{\alpha\beta} a'(x,s)^{1-\theta|\alpha|}, \quad 0 < |\gamma| \le n.$$

Под алгебраической кратностью с.з. λ_0 оператора $\mathcal{A}_{p,k}$ понимается размерность линейного пространства натянутого на произвольные цепочки собственных и присоединенных в.-ф. оператора $\mathcal{A}_{p,k}$, отвечающие с.з. λ_0.

Теорема 1. *При выполнении сформулированных выше условий найдется $\lambda' \in \mathbf{C}$ такое, что $(\mathcal{A}_{p,k} - \lambda' E)^{-1}$ будет компактным оператором в $\mathcal{H}_{p,k}$. Спектр оператора $\mathcal{A}_{p,k}$ состоит из изолированных с.з. конечных алгебраических кратностей с единственной предельной точкой на бесконечности.*

Занумеруем последовательность с.з. оператора $\mathcal{A}_{p,k}$ в виде $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ с учетом их алгебраических кратностей. Обозначим

$$N(t) = card\, \{j \,:\, Re\, \lambda_j \le t\}.$$

Введем функцию

$$\Psi(t) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} \int\limits_{R^n} \tau(x, s, t) dx ds,$$

где $\tau(x, s, t)$ обозначает число с.з. матрицы $a(x, s)$, вещественные части которых не превосходят t.

Теорема 2. *Пусть*

$$\lim_{x \to +\infty} |Im\, a(x, s)|(a'(x, s))^{-1} = 0,$$

равномерно по $s \in R^n$. *Пусть найдется неубывающая функция* $\Phi(t) \in C'(R)$ *такая, что* $t\Phi'(t) = O(1)\Phi(t)$, $\Psi(t) \sim \Phi(t)$, $t \to +\infty$. *Тогда* $N(t) \sim \Phi(t)$, $t \to +\infty$.

Пример.

$$A = (1 + i(1 + |x|^2)^{-\nu})(1 - \Delta)^{\rho} + (1 + |x|^2) + i(1 + |x|^2)^{1-\nu},\ \nu > 0, \rho > 0.$$

УДК 519.6

Стохастические модели в страховании

Гафуров П.Ч.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

Стохастические модели и методы находят все более широкое применение в современных финансово-экономических расчетах, они проникают и в теорию страховании. Один из основных принципов стохастических моделей является учет риска и неопределенности. В страховых операциях мерой такого риска является непредсказуемая изменчивость ожидаемых страховых взносов. Это неотъемлемая черта экономической реальности – с каждым управленческим решением, как правило, связан определенный риск и неопределенность.

Рассмотрим страховую кампанию, на счета которой аккумулируются денежные средства за счет поступлений страховых взносов из пунктов выплаты страховых премий.

Для математической постановки задачи введем обозначения:

$m-$ число пунктов выплат страховых премий;

R – предельная сумма поступлений страховых взносов из всех филиалов страховой компании;

r_i–предельная сумма поступлений страховых взносов i-го филиала страховой компании;

x_i– объем денежных средств в i-ом филиале страховой компании;

θ_i– случайная величина потребности в денежных средствах i-го пункта выплат страховых премий;

l_i – удельные затраты, связанные со сбором денежных средств в i-ом филиале страховой компании;

α_i– удельные затраты, связанные с хранением и переводом денежных средств в i-ом филиале страховой компании ;

β_i– удельные потери связанные с не выплатой страховых премий.

Задача состоит в определении x$_i$ объема денежных средств, минимизирующих средние затраты на хранение, перевод денежных средств и средних потерь от не выплаченных страховых премий, т.е.:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} l_i x_i + Mf(x, \theta) \to \min, \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \le R, \tag{2}$$

$$0 \le x_i \le r_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3}$$

где $f(x_i, \theta_i)$ является стоимостной функцией затрат и потерь, которая определяется следующим образом:

$$f(x_i, \theta_i) = l_i x_i + \begin{cases} \alpha_i(x_i - \theta_i), \text{если}\, x_i \ge \theta_i,\, \alpha_i > 0, \\ \beta_i(\theta_i - x_i), \text{если}\, x_i < \theta_i,\, \beta_i > 0,\, i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь l_i, α_i, β_i – исчисляются в процентах по отношению к общему поступлению денежных средств.

В рассматриваемой задаче величина θ_i определяется согласно эмпирической функции распределения, построенного на основе данных выплат страховых премий.

Задача (1)–(3) является одноэтапной задачей стохастического программирования [1].

В данной работе предлагается алгоритм решения поставленной задачи на основе стохастических квазиградиентных методов стохастического программирования [2] .

Алгоритм решения. Пусть x_i^s – приближение, полученной на s–й итерации (в случае, когда закон распределения неизвестен, оно имитируется в соответствии с известными реализациями величины θ_i с помощью простой имитационной модели).

Вычислим вектор $\xi^s = (\xi_1^s, ..., \xi_m^s)$, компоненты которого определяются как обобщенный градиент функции (4):

$$\xi_i^s = \hat{f}_{ix}(x_i^s, \theta_i^s) = c + \begin{cases} \alpha_i, & \text{если} \quad x_i^s \geq \theta_i^s, \quad s = 0, 1, ..., \\ -\beta_i, & \text{если} \quad x_i^s < \theta_i^s, \quad i = 1, ..., m \end{cases} \qquad (5)$$

Новое приближение находим согласно следующему варианту метода стохастических квазиградиентов с проектированием:

$$x_i^{s+1} = \pi_X(x_i^s - \rho_s \xi_i^s), \quad s = 0, 1, ...$$

Поскольку множество X образовано ограничениями (2)–(3), то для осуществления операции проектирования требуется на каждой итерации находить решение задачи квадратичного программирования вида:

$$\pi_X(y_i^s) = \arg\min \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i^s)^2 / x_i \in X \right\},$$

Эту задачу можно решить методом квадратичного программирования, изложенным в работе [1], программная реализация которого приводится в [3].

Литература

1. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования.- М.: Наука, 1976.

2. Мирзоахмедов Ф. Математические модели и методы управления производством с учетом случайных факторов. Киев, "Наукова думка", 1991.

3. Мирзоахмедов Ф., Михалевич М.В. Прикладные аспекты стохастического программирования. Душанбе, "Маориф", 1999.

УДК 517.9

Об одном дискретном моделе вариационной задачи

Давлятов И.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

Стремление дать связное изложение конструкций и результатов для трехмерного случая работы Дезина А.А. [1], привели нас к трехмерным преобразованиям Абеля и к дискретным аналогам естественных инвариантных операторов d и δ (оператор внешнего дифференцирования и метрический сопряженный с ним) [2].

В [3], рассматривается некоторые задачи и соотношения связанные с этими операторами. Продолжая изучение свойств этих операторов в двумерном случае получили следующие результаты.

Обозначим через H^p гильбертовы пространства форм с суммируемым квадратом в области $V \subset R^2$ (см [1], стр.171)

$$V = \sum V_{ij}, \quad i = 1, ..., N; \quad j = 1, ..., M.$$

Рассмотрим дискретные задачи Дирихле для уравнения Пуассона. В уравнении

$$-\Delta\xi \equiv (d\delta + \delta d)\xi = h \tag{1}$$

формы $\xi, h \in H^p$ могут иметь степени $p = 0, 1, 2$.

Остановимся на классическом случае

$$-\Delta\varphi \equiv \delta d\varphi = g, \tag{2}$$

где φ искомая, а $g-$ заданная формы из H^0.

Запись (2), поточечно дает

$$\delta d|_{x_{i,j}} \equiv 4\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j} - \varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j-1} - \varphi_{i,j+1} = g_{i,j}. \tag{3}$$

Определение. *Форму $\varphi \in H^0$ назовем решением задачи Дирихле для уравнения (2), если при всех $i = \overline{1, N}$ $j = \overline{1, M}$ выполнены равенства (3), в которых положено*

$$\varphi_{i,0} = \varphi_{i,M+1} = 0, \quad \varphi_{0,j} = \varphi_{N+1,j} = 0. \tag{4}$$

Через $D(V)$ обозначим множество всех форм $\varphi \in H^0$, удовлетворяющих условиям (4) и для произвольных двух элементов $\varphi, \psi \in D(V)$ определяем скалярное произведение

$$< \varphi, \psi >_V = (d\varphi, d\psi)_V + \sum_i \varphi_{i,1}\psi_{i,1} + \sum_j \varphi_{1,j}\psi_{1,j} \tag{5}$$

где

$$(d\varphi, d\psi)_V = \sum_{i,j} (\Delta_1 \varphi_{i,j}\ \Delta_1 \psi_{i,j} + \Delta_2 \varphi_{i,j}\ \Delta_2 \psi_{i,j}),$$

$$\Delta_1 \varphi_{i,j} = \varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}, \quad \Delta_2 \varphi_{i,j} = \varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}, \quad i = \overline{1,N}, \quad j = \overline{1,M}$$

и аналогично определяются $\Delta_1 \psi_{i,j}$, $\Delta_2 \psi_{i,j}$, а множество $D(V)$ со скалярным произведением (5) обозначим через W_2^0.

Лемма 1. *Любое решение уравнения (2) с граничным условием (4) удовлетворяет равенство*

$$< \varphi, \psi >_V = (g, \psi)_V, \quad \forall \psi \in W_2^0 \tag{6}$$

Определение 2. *Форма $g \in W_2^0$ называется обобщенным решением задачи (2), (4), если она удовлетворяет равенство (6) для всех $\psi \in W_2^0$.*

Лемма 2. *Пусть $g \in H^0$ и пусть $\varphi^0 \in H^0$ является обобщенным решением задачи (2),(4). Тогда функционал*

$$F(\varphi) = (d\varphi, d\varphi)_V + \sum \varphi_{i,1}^2 + \sum \varphi_{1,j}^2 - 2(g, \varphi)_V \tag{7}$$

принимает свой минимум в W_2^0 при $\varphi = \varphi^0$.

Теорема 1. *Для любого заданного элемента $g \in H^0$ существует и притом единственное обобщенное решение задачи (2),(4).*

Теорема 2. *Для любой заданной формы $g \in H^0$ существует и притом единственный элеменет $\varphi^0 \in W_2^0$, на котором функционал $F(\varphi)$, задаваемый в W_2^0 равенством (7), принимает свое минимальное значение.*

Аналогичные результаты можно получить при рассмотрении уравнения (1) при $p = 1$, 2 и соответственно выбранным граничным условиям.

Литература

1.Дезин А.А. Многомерный анализ и дискретные модели. М.: Наука, 1990, 238с.

2. Давлятов И. -Докл. АН РТ, 1992, т.35, №2. с. 85–89.

3. Давлятов И. -Докл. АН РТ, 1993, т.36, №3. с. 165–168.

УДК 517.968.2

О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов и их приложения к эллиптическим системам дифференциальных уравнения со сингулярными коэффициентами

Джангибеков Г., Михайлов Л.Г., Одинабеков Дж.
(Институт математики АН РТ, Хорогский госуниверситет)

В пространстве $L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D)$:

$$L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D)=\left\{f(z):\prod_{j=1}^{m}|z-z_j|^{\beta_j-2/p}f(z)=F(z)\in L^p(D),\right.$$

$$\left.||f||_{L^p_{\Pi(\beta-2/p)}}=||F||_{L^p}\right\},(1<p<\infty,\ 0<\beta<2)$$

рассматривается следующий оператор

$$A\equiv a(z)I+b(z)\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\overline{z}-\overline{z_j}}{|z-z_j|}\right)^{n_j-2}K+$$

$$+c(z)\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{z-z_j}{|z-z_j|}\right)^{2}S+d(z)\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\overline{z}-\overline{z_j}}{|z-z_j|}\right)^{n_j}\overline{S}K+$$

$$+\nu(z)\overline{B}+\delta(z)BK+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\overline{z}-\overline{z_j}}{|z-z_j|}\right)^{n_j-2}H_{1j}K+H_{2j}, \qquad (1)$$

где $n_j, j=1,2,\dots,m$ - целые числа, $a(z),b(z),c(z),d(z),\nu(z),\delta(z)$ - непрерывные в $\overline{D}$ функции, а операторы $K,S,\overline{S},H_{ij},B,\overline{S}$ действуют по формулам

$$(Kf)(z)=\overline{f(z)},\quad (Sf)(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D}\frac{f(z)ds_\zeta}{(\zeta-z)^2},\quad \overline{S}=KS,$$

$$(Bf)(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D}\frac{\omega'(z)\overline{\omega'(\zeta)}}{(1-\omega(z)\overline{\omega'(\zeta)})}f(\zeta)ds_\zeta,\quad \overline{B}=KB,$$

$$(H_{ij}f)(z)=\frac{1}{|z-z_j|^2}\iint\limits_{D}Q_{ij}(z,\zeta)h_{ij}\left(\frac{\zeta-z_j}{z-z_j}\right)f(\zeta)ds_\zeta,\quad i=1,2;j=\overline{1,m},$$

$\omega(z)$ - однолистное конформное отображение области D на единичный круг с центром в начале координат, причем $\omega(0)=0, \omega'(0)>0, ds_\zeta$ - элемент плоской меры Лебега, D- конечная односвязная область комплексной плосткости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ и содержащая внутри точку $z=0$ и точки $z_1, z_2, \ldots, z_m$, $\overline{D}=D\cup\Gamma$.

Таким образом, коэффициенты при операторах $K, S, \overline{S}K$ имеют существенные разрывы в точках $z_1, z_2, \ldots, z_m$, а операторы $H_{1j}K, H_{2j}, j=1,2,\ldots,m$ имеют фиксированные особенности в точках $z=z_j$. Следует отметить, что оператор A при $b(z)\equiv c(z)\equiv \delta(z)\equiv 0$ изучен в работе [1].

В настоящей работе установлены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости оператора вида (1) в пространстве $L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D)$ и получено формула для вычисления его индекса.

Даны приложение полученных результатов к задаче Дирихле для эллиптической системы второго порядка с двумя сингулярными точками;

$$a(z)\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial\overline{z}}+b(z)\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z\partial\overline{z}}+c(z)e^{-2i(\varphi_1+\varphi_2)}\frac{\partial^2\omega}{\partial\overline{z}^2}+d(z)e^{2i(\varphi_1+\varphi_2)}\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z^2}+$$

$$+\left(\frac{a_1(z)}{z-z_1}+\frac{a_2(z)}{z-z_2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\overline{z}}+\left(\frac{b_1(z)}{\overline{z}-\overline{z}_1}+\frac{b_2(z)}{\overline{z}-\overline{z}_2}\right)\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial z}+ \tag{2}$$

$$+c_1(z)\frac{\partial\omega}{\partial z}+d_1(z)\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{z}}+e_1(z)\omega+h_1(z)\overline{\omega}=g(z),$$

где $z=x+iy, \omega=u(x,y)+iv(x,y), \varphi_j=\arg(z-z_j), j=1,2$, формальные производные по z и $\overline{z}$ определяются по формулам

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

коэффициенты $a(z), b(z)$, и т.д. будем считать непрерывными функциями в $\overline{D}$, а $g(z)\in L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D)$ $(2<p<\infty, 0<\beta_j<1)$.

Отметим, что системе с одной сингулярной точкой, т.е. когда в (2) $b(z)=c(z)\equiv 0, \quad a_2(z)=b_2(z)\equiv 0$, посвящена работа [2].

Работа анансированна в [3].

Литература

1. Джангибеков Г. // ДАН СССР. 1992. т. 322. №1. с. 22-27.

2. Джангибеков Г. Зарифбеков М. // Вестник Нац. универ. 2004. Сер. матем. №1. с. 33-42.

3. Михайлов Л.Г., Джангибеков Г., Одинабеков Дж. //ДАН России, 2006, т. 409, №6, стр. 1 - 5.

УДК 517.968.2

О краевой задаче Римана – Гильберта для общей эллиптической системы дифференциальных уравнений первого порядка на плоскости

Джангибеков Г.
(Хорогский госуниверситет, г. Хорог)

Будем рассматривать в ограниченной односвязной области D с гладкой границей Ляпунова Γ плоскости R_2 следующую систему

$$AU_x + BU_y + CU = G, \tag{1}$$

где A, B, C заданные вещественные матрицы–функции второго порядка, $G = (g_1, g_2)$ - заданная вещественная вектор функция и $U = (u, v)$ - неизвестная вещественная вектор–функция. Мы будем предполагать, что элементы матрицы $A, B:\ a_{jk}, b_{jk}\ (j, k = 1, 2)$ - непрерывные функции в области D, элементы матрицы $C : c_{jk}$ и вектора G принадлежат пространству $L_p(G), p > 2$.

Система дифференциальных уравнений первого порядка (1) называется эллиптическим, если его характеристический матричный полином $A + \lambda B$ для любых действительных λ удовлетворяет условию

$$\det(A + \lambda B) \neq 0, \tag{2}$$

т.е. это означает, что должно выполняться следующее условие

$$4\alpha\beta > (\alpha_1 + \beta_1)^2, \tag{3}$$

где

$$\alpha = \det A = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = det \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$
$$\beta = \det B = det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = det \begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Задача Римана - Гильберта. Требуется отыскать непрерывное в области $\overline{D}$ решение U системы (1) из класса $W_p^1(D)\quad p > 2$, удовлетворяющее на границе Γ краевому условию

$$\nu_1 u + \nu_2 v = h, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 \neq 0, \quad \text{на } \Gamma, \tag{4}$$

где предполагается, что функции ν_1, ν_2 и h удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\alpha : 0 < \alpha < 1$.

Граничная задача Римана - Гильберта (4) для эллиптической системы (1) приведенной к одной специальной комплексной форме исследовалась в известной монографии Векуа И.Н. и в работах Виноградова В.С.,Боярского Б.. В настоящей работе мы будем изучать вопрос нетеровости и индекса задачи (4) для эллиптической системы (1) в общем случае. Исследование этой задачи будем проводить методом впервые предложенным Векуа И.Н. т.е. путем эквивалентного ее приведения к двумерному сингулярному интегральному уравнению. Отметим, что в монографии Векуа И.Н. исследование разрешимости получаемого сингулярного интегрального уравнения можно было проводить методом сжатых отображений. Здесь этот метод в общем случае неприменим и мы пользуемся результатами полученные нами ранее (Мат. заметки. 1989. т. 46. в. 5).

Эллиптическую систему (1) запишем в комплексной форме

$$a(z)\omega_{\overline{z}} + b(z)\overline{\omega}_z + c(z)\omega_z + d(z)\overline{\omega}_{\overline{z}} + A_1(z)\omega + A_2(z)\overline{\omega} = F(z), \qquad (5)$$

где $\omega = u + iv,\ F = 2(g_1 + ig_2)$,

$$\begin{aligned} a &= a_{11} - b_{12} + a_{22} + b_{21} + i(a_{21} - b_{22} - a_{12} - b_{11}), \\ b &= a_{11} - b_{12} - a_{22} - b_{21} + i(a_{21} - b_{22} + a_{12} + b_{11}), \\ c &= a_{11} + b_{12} + a_{22} - b_{21} + i(a_{21} + b_{22} - a_{12} + b_{11}), \\ d &= a_{11} + b_{12} - a_{22} + b_{21} + i(a_{21} + b_{22} + a_{12} - b_{11}), \\ A_1 &= c_{11} + c_{22} + i(c_{21} - c_{12}),\ A_2 = c_{11} - c_{22} + i(c_{21} + c_{12}). \end{aligned}$$

Имеет место

Теорема. *Для того, чтобы однородная задача (4) ($\eta = 0$) для эллиптической системы (1) была нетеровой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись одно из условий*

$$\omega_{\overline{z}} + q_1\omega_z + q_2\overline{\omega}_{\overline{z}} + a_1\omega + b_1\overline{\omega} = F_1,\ |q_1| + |q_2| < 1, \qquad (6)$$

или

$$\omega_z + q_3\omega_{\overline{z}} + q_4\overline{\omega}_z + a_2\omega + b_2\overline{\omega} = F_2,\ |q_3| + |q_4| < 1. \qquad (7)$$

При этом, если выполнено условие (6), то индекс задачи (4) равен $1 + 2æ$, *где*

$$æ = Ind_{\Gamma}[\nu_1(t) + i\nu_2(t)],$$

а если выполнено условие (7), то индекс задачи равен $1 - 2æ$.

УДК 517.925

Построение регуляризатора для операторов класса Трибеля

Гоибов Д.С.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

Пусть $J=(a,b)$, $-\infty<a<b<+\infty$, $\rho(t)\in C^{\infty}(J)$–некоторая положительная функция, удовлетворяющая следующим условиям

$$\lim_{t\to a}\rho(t)=\lim_{t\to b}\rho(t)=+\infty,\quad \rho(t)\geq 1;\quad \rho^{(k)}(t)=O(\rho^{1+k}(t)),\, k=1,2,...$$

Пусть $m\in N$, $\mu,\nu\in(-\infty;+\infty)$, $\nu>\mu+2m$. Положим

$$\chi_1=\frac{1}{2m}(\nu(2m-1)+\mu l),\quad l=0,1,2,...,2m.$$

Класс Трибеля $N^{m}_{\mu,\nu}(J;\rho(t))$ (см.[1, гл.6]) состоит из дифференциальных операторов вида

$$A=\sum_{l=0}^{m}\rho^{\chi_{2l}}(t)b_l(t)\frac{d^{2l}}{dt^{2l}}+\sum_{k=0}^{2m-1}a_k(t)\frac{d^k}{dt^k},\quad 0<t<+\infty.$$

Здесь $b_l(t)\in C^{\infty}(J)$, $(l=\overline{0,m})$– вещественные функции такие, что для всех $k=0,1,2,...$

$$\sup_{t\in J}|\frac{d^k}{dt^k}b_l(t)|<+\infty.$$

Требуется, что при некотором $c>0$, для всех $t\in J$ выполняются неравенства

$$b_0(t)\geq c,\quad (-1)^m b_m(t)\geq c,\quad (-1)^l b_l(t)\geq 0,\quad l=1,2,...,m-1.$$

В том числе $a_k(t)\in C^{\infty}(J)$, $k=\overline{0,2m-1}$, и для всех $j=0,1,2,...$

$$\lim_{t\to a}\rho^{-j-\chi_k}(t)\frac{d^j}{dt^j}a_k(t)=0,\quad \lim_{t\to b}\rho^{-j-\chi_k}(t)\frac{d^j}{dt^j}a_k(t)=0.$$

Положим

$$R_0(t,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{is(t-\tau)}}{\sum\limits_{l=0}^{m}(-1)^l\rho^{\chi_{2l}}(\eta)b_l(\eta)S^{2l}+\lambda}ds,$$

$$R_j(t,\tau) = (\frac{d}{idt})^j R_0(t,\tau), \quad i--.$$

где $i-$ мнимое единица.
Для $j=\overline{1,2m-2}$ имеем

$$R_j(t,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{s^j e^{is(t-\tau)}}{\sum\limits_{l=0}^{m}(-1)^l \rho^{\chi_{2l}}(\eta) b_l(\eta) S^{2l} + \lambda} ds,$$

$$F(t,q) = h^{-1}(t)\varphi_\varepsilon(t,\tau)R_0(t,\tau), \quad \text{где}$$
$$h(t) = (-1)^m \rho^{\chi_{2m}}(t) b_m(t) \in C^{2m}(J)$$
$$\varphi_\varepsilon(t,\tau) = \varphi(\varepsilon(t-\tau)\varphi^{-1}(\tau))$$

Теорема. *Пусть $A \in N^m_{\mu,\nu}(J;\rho(t))$ и выполнены условия перечисленные выше. Тогда для $\upsilon \in B^1_0(J)$ справедливо*

$$AF_\upsilon = \upsilon + G_0\upsilon + \sum_{l=1}^{m-1} G_{(l)}\upsilon + \sum_{j=1}^{2m} G_{(j)}\upsilon + \sum_{l=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{2l} G^{(j)}_{(l)}\upsilon +$$

$$+\sum_{j=0}^{2m-2} G^{(j)}_{(2m-1)}\upsilon + G_{(2m-1)}\upsilon + \sum_{k=0}^{2m-2}\sum_{j=0}^{k} G^{(j)}_{(k)},$$

где F, G_0, $G_{(l)}$, $G_{(j)}G^{(j)}_{(l)}$, $G^{(j)}_{(2m-1)}$, $G_{(2m-1)}$, $G^{(j)}_{(k)}$ *– интегральные операторы соответственно с ядрами*

$$F(t,\tau), \quad G_0(t,\tau) = (q(t)-q(\tau))R_0(t,\tau)\varphi_\varepsilon(t,\tau),$$
$$G_{(l)}(t,\tau) = (\rho^{\chi_x}(t)b_l(t) - \rho^{\chi_x}(\tau)b_l(\tau))(D_t^{2l}R_0(t,\tau))\varphi_\varepsilon(t,\tau),$$
$$G_{(j)}(t,\tau) = -C^j_{2m}(D_t^{2m-j}R_0(t,\tau))(D_t^j\varphi_\varepsilon(t,\tau)),$$
$$G^{(j)}_{(l)}(t,\tau) = (\rho^{\chi_x}(t)b_l(t) - \rho^{\chi_x}(\tau)b_l(\tau))C^j_{2l}(D_t^{2l-j}R_0(t,\tau))(D_t^j\varphi_\varepsilon(t,\tau)),$$
$$G^{(j)}_{(2m-1)}(t,\tau) = i^{2m-1}a_{2m-1}(t)C^j_{2m-1}(D_t^{2m-1-j}R_0(t,\tau))(D^j\varphi_\varepsilon(t,\tau)),$$
$$G_{(2m-1)}(t,\tau) = i^{2m-1}a_{2m-1}(t)R_0(t,\tau)\varphi_\varepsilon(t,\tau),$$
$$G^{(j)}_{(k)}(t,\tau) = i^k a_k(t) C^j_k(D_t^{k-j}R_0(t,\tau))(D_t^j\varphi_\varepsilon(t,\tau)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Трибель Х., Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. –М.: Мир, 1980.

2. К.Х.Байматов, П.И.Лизоркин. Дифференциальные уравнения, 1989. Т.25, №4, с.578-588.

УДК 588.7+16.31.21+811.222.8

О статистических закономерностях языка эсперанто

Ёкубзода С.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

В сообщение рассматривается статистические закономерности, свойственные распределению частот встречаемости букв в текстах, написанных на языке Эсперанто. Эти результаты получены путем исследования случайной выборки объемом в 401 страниц.

Известно, что алфавит Эсперанто состоит из 28 букв, [1]. В упомянутой выборке оказалось 857763 букв, в среднем 2139 букв на одной странице. Для целей исследования исходные данные были предварительно "расфасованы" по 80-и пакетам $P_1, P_2, \ldots, P_{80}$ "вложенным" друг в друга $(P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_{80})$ в следующем смысле. Пакет укомплектован 5 страницами, случайным образом извлеченными из общего числа в 401 страницу. В пакет P_k, $k = 2, \ldots, 79$ включены $5k$ страниц, из которых $5(k-1)$- те же, что и в пакете P_{k-1} и еще 5 дополнительных извлечены случайным образом из числа оставшихся $401 - 5(k-1)$ страниц. Последний пакет P_{80} включил в себя все подготовленные к обработке экспериментальные данные, т.е. 401 страницу.

Для каждого пакета P_k, $\quad k = 1, ..., 80$ путем обработки всех страниц, входящих в его состав, получено статистическое распределение D_k частот встречаемости букв алфавита Эсперанто, а затем и усредненное статистическое распределение D^{cp}.

При сравнении распределений D_k, $\quad k = 1, ..., 80$, между собой, а также с усредненным распределением D^{cp}, получен следующий результат.

Теорема 1. *Все упомянутые распределения статистически неразличимы.*

Этот факт проверятся с помощью критерия согласия Пирсона. Действительно, для проверки справедливости нулевой гипотезы H_0, т.е. утверждения, высказанного в теореме 1, вычисляются наблюдаемые значения случайной величины χ^2 по формуле: где ν_i' и ν_i'' - частоты встречаемости (в процентах) i - ой буквы алфавита Эсперанто в распределениях D' и D'' в качестве которых выбираются любые из упомянутых ранее распределений D_k, $\quad k = 1, ..., 80$ и D^{cp}. Если исключить из рассмотрения распределение D_1, которое построено по данным всего лишь 5-и случайно выбранных страниц, то при сравнении всех прочих распределений между собой мы получаем $\chi^2 \leq 0.8$. В случае, если какое-либо распределение сравнивается с D_1, то $6 \leq \chi^2 \leq 7$.

Поскольку при сравнении между собой всех без исключения распределений имеет место неравенство то этим самым устанавливается справедливость теоремы 1, которую удобно переформулировать в несколько ином эквивалентном виде:

Теорема 2. *Распределение частот встречаемости букв языка Эсперанто является статистическим инвариантом случайных выборок объемом не менее* 10 *страниц.*

Литература

1.Эсперанто-Русский словарь, М.: Издательство "Русский язык", 1982. 488 с.

УДК 517.54

О спектре одномерных операторов Шредингера с потенциалами типа слабо взаимодействующих потенциальных ям

Замонов М.З.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

В этой заметке нами рассмотрен спектральные свойства одномерного оператора Шредингера $Hy = -y'' + V(x)y$, имеющего смысл оператора энергии частицы с одной степенью свободы в силовом поле с потенциальной энергией $V(x)$.

Рассмотрим положительную полуось R_+; пусть функция $V(x)$ не имеет нигде особенности, за исключением быть может, бесконечности. Тогда возможны, грубо говоря, четыре различных случая (см. монографию Титчмарша Э.Ч. [1]):

1) если $V(x) \to +\infty$, то спектр чисто точечный; этот случай иллюстрируется примерами $V(x) = x^2, \;\; V(x) = x$;

2) если $V(x) \to +0$, то положительная полуось $[0, \infty]$ заполняется точками непрерывного спектра, а на отрицательной полуоси возможен лишь точечный спектр (он может вообще отсутствовать); соответствующие примеры - функции $V(x) \in L_{(0,\infty)}$ и в частности

$$V(x) = \alpha(1-\alpha)/4\cosh^2(x/2);$$

3) если $V(x) \to -\infty$, но при этом интеграл $\int\limits_0^\infty |V(x)|^{-1/2}dx$ расходится, то спектр оказывается непрерывным и заполняет всю ось $(-\infty, +\infty)$; пример $V(x) = -x$;

4) если $V(x) \to -\infty$ и $\int_0^\infty |V(x)|^{-1/2}dx < \infty$, то спектр чисто точечный; соответствующий пример $V(x) = -exh2x$.

Эты вышеназванные результаты принадлежать Г. Вейлю и Э.Ч. Титчмаршу. С тех пор прошло много времени и исследованием природы спектра одномерных операторов Шредингера занимались и продолжают заниматься многие известные математики как Б. Саймон, В. Кирш, С. Котани, Т Спенсер, С. Молчанов, Л. Пастур, А. Фиготин, М. Клауз (см. работы [2 - 6]) и другие.

Теперь рассмотрим спектральную задачу

$$H^\theta y = -\frac{d^2 y}{dx^2} + V(x)y = \lambda y, \quad x \geq 0,$$

$$y'(0)\cos\theta + y(0)\sin\theta = 0, \quad V(x) \geq 0$$

в пространстве $L_2(R_+)$.

Допустим, что имеется система интервалов $\Delta_n = (a_n, b_n) \subset R_+$, удовлетворяющих условий:

а) $a_n - b_{n-1} = l_n \to \infty \ \ (n \to \infty)$;

б) $V(x) \to \infty \ \ (x \to \infty)$ и $x \notin \bigcup\limits_n \Delta_n$

в) $H_n = -y'' + V(x)y, \ \ x \in \Delta_n, \ \ n = 1, 2, \ldots; \ \ y(a_n) = 0, \ \ y(b_n) = 0$; (и пусть $\lambda_{in} \in S_p H_n \neq \oslash; \ \ i = 1, 2, \cdots$);

г) $0 \leq V(x) \leq c_n < c, \ \ x_n \in \Delta_n, \ \ n = 1, 2, \cdots$;

д) $0 \leq \Delta_n < d$, и как правило, $\Delta_n \to 0 \ \ (n \to \infty)$.

Тогда справедлива следующая

Теорема. *Имеет место соотношение*

$$S_{p_{ess}} H^\theta = \overline{\{\lambda_{in}\}},$$

где $S_{p_{ess}} H^\theta$ - существенный спектр оператора H^θ, а $\overline{\{\lambda_{in}\}}$ замыкания множеств собственных значений операторов H_n.

Замечание. Потенциалы определенные на системах интервалов удовлетворяющих условий а) - д) и их дополнениях, а также для которых выполняются условия б) и г) называются потенциалами типа слабо взаимодействующих потенциальных ям.

Литература

1. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. т.1, М.: ИЛ, 1960.
2.Kirsch W., Kotani S., Simon B. Absense of absolutely continuons

spectrum for one - dimensional random but determinitic Schrodinger operators. Ann. Inst. H. Poincare 42 (1985), 383.
3. Klaus M. On $-d^2/dx^2+V$ where V has infinitely many "bumps". Ann. Inst. H. Poincare 38 (1983), 7 - 13.
4. Simon B., Spenser T. Trase Class Perturbations and the Absolutely Continuons Spectra. CMP, 1989, v. 125, №1, p.113 - 125.
4. Кирш В., Молчанов С., Пастур Л. Точечный спектр для одномерных операторов Шредингера с неограниченным потенциалом. 1990. Рукопись (8стр.)
5. Пастур Л.А., Фиготин А.Л. Случайные и почти - периодические операторы. Общие спектральные свойства и расспределения собственных значений. - М.: Наука, 1989.

УДК 517.95

Итерационный метод получения представления решений вырождающихся уравнений

Закиров С.Х.
(Таджикский государственный национальный университет, г.Душанбе)

В заметке [1] было отмечено, что с помощью известных преобразований, уравнения

$$(z-\bar{z})W_{z\bar{z}}+(n+1)(W_{\bar{z}}-W_z)=0, \qquad n=0,1,2,\dots$$

сводится к уравнению

$$(z-\bar{z})^2V_{z\bar{z}}+n(n+1)V=0, \tag{1}$$

решение которого на верхней полуплоскости можно представить как комбинации двух аналитических функций и их производных до $n-$ х порядков. Там же было сказано о возможности построения решения более общих уравнений с помощью уравнений (1). Для подтверждения сказанного в докладе показывается получение решения уравнения

$$Lu=(z-\bar{z})^2U_{z\bar{z}}+k(z-\bar{z})U_{\bar{z}}+n(n-k+1)U=0,$$

при последовательной воздействие оператора

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{n}{z-\bar{z}}\right)^k$$

на решение уравнения (1).

Заметим, что используя свойства коммутативности операторов L и $d = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{n}{z-\bar{z}}$ т.е. $Ld = dL$, можно получить решения уравнения $L^2 u = 0$ в виде $u = u_1 + (z+\bar{z})u_2$, u_1, u_2 – решения уравнения (2).

Литература

1. Зокиров С.Х. Комплекснозначное решение уравнения с сингулярными коэффициентами // Материалы научно-теоретической конференции ППС и студентов ТГНУ.-Душанбе, 2006, ч.1, с.23-24.

УДК 519.714

Проблема синтеза оптимального управления и дробные степени позитивных операторов

Илолов М.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

Пусть X-гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$, A- замкнутый линейный оператор действующий в X и имеющий плотную в X область определения $D(A)$. Оператор A будем называть позитивным если для $t \in [0, \infty)$ существуют операторы $(tI + A)^{-1}$ и

$$\|(tI + A)^{-1}\| \leq \frac{c}{1+t}, \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Для позитивного оператора A определим семейство операторов A^{-z} формулой

$$A^{-z} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \int\limits_0^\infty t^{-z}(tI + A)^{-1} dz, \tag{2}$$

где $z \in C$ удовлетворяет неравенством $0 < Rez < 1$.

В [1] установлено, что семейство A^{-z} ограниченно, удовлетворяет полу групповое тождество

$$A^{-z_1} \cdot A^{-z_2} = A^{-z_1 - z_2} = I, \quad (0 < Rez_1, Rez_2 < \infty) \tag{3}$$

и полугруппа A^{-t}, $(t \geq 0)$ аналитична. Отметим, что класс позитивных операторов шире чем класс производящих операторов сильно непрерывных полугрупп.

Далее, через X_1 обозначим гильбертово пространство $D(A)$ с нормой

$$\| \cdot \|_1 = \|(\beta I - A) \cdot \|,$$

где $\beta \in \rho(A)$ – резольвентное множество, а через X_{-1} – пополнение пространства X относительно нормы $\| \cdot \|_{-1} = \|(\beta I - A)^{-1}\|$. Это пространство изоморфно $\Delta(A^*)^*$ и в этой связи мы придем к плотное непрерывное вложение

$$X_1 \subset X \subset X_{-1}.$$

Введем также гильбертово пространство U и оператор управления $B \in Z(U, X_{-1})$. Оператор $B : U \to X_{-1}$ называется допустимым оператором управления, если он подчинен в смысле [1] дробной степени $A^{\tau_0}(\tau_0 > 0)$ позитивного оператора А.

Переходим к формулировке основной задачи.

Рассмотрим динамическое уравнение системы управления вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \ 0 < t < \infty, \tag{4}$$

где $x(0) = x_0$ задано, $A-$ позитивный оператор, $B-$ допустимый оператор управления, $x(t) \in X$ – состояние системы, $u(\cdot)$ – управление в виде элемента пространства $L_2([0, \infty), U)$.

Пользуясь результатами, изложенные в монографии [2] (см., также обзор[3]) можно доказать, что решение уравнение (1) существует и единственно для каждого $u(\cdot) \in L_2$ в интегральном смысле.

В настоящей работе изучается линейно-квадратическая задача оптимального управления, заключающейся в нахождении для каждого $x_0 \in X$ элемента $u \in L_2$ реализующего минимум функционала качества

$$J(x_0, u) = \int\limits_0^\infty \left(\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2\right) dt, \tag{5}$$

причем ищется оптимальное управление с полной обратной связи вида

$$u(t) = q(t, x(t)).$$

Такая задача известна в литературе как проблема синтеза (см. напр. [2])

Литература

1. Красносельский М.А., Забрейко П.П„ Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., "Наука", 1966, 499 стр.

2. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ, М., "Наука", 383 стр.
3. Weiss G. Rebarber R. Optimizability and ectimatibility for infinite-dimensional linear systems, SIAM J. Control Optim. 2000, Vol. 39, №4, pp. 1204-1232.

УДК 512+519.4

О проблеме разрешимости в некоторых алгебраических структурах

Исроилов С.
(Технологический университет Таджикистана, г.Душанбе)

Понятие финитной аппроксимируемости алгебр относительно предикатов оказалось важным прежде всего, при изучении алгоритмических вопросов в теории полугрупп.

Благодаря установленной А. И. Мальцевым [1] связи между финитной аппроксимируемости алгебр и алгоритмическими задачами начали шире развиваться исследование для класса алгебраических структур, обладающих свойством финитной аппроксимируемости (финитной определимостью) известной алгоритмической проблемы разрешимости о равенстве, о порядке, и о вхождения элемента в подсистемы.

А.И. Мальцев в работе [1] показал, что если коммутативная конечно определенная полугруппа финитно аппроксимируема относительно равенства, то проблема для класса всех K−ступенно нильпотентных групп задача о вхождении элемента в подалгебру алгоритмически разрешима. М.М. Лесохиным в работе [2] найдены необходимые и достаточные условия алгоритмически разрешимости проблемы тождество и делимости.

В данной работе изучается вопрос об алгоритмически разрешимости проблемы равенства, порядка, делимости, сопряженности и вхождения элементов в выпуклых подполугрупп и идеалов.

На некоторых полугруппах бинарное отношение: $a \leq_e b$ тогда и только тогда, когда существуют такие $x, y \in A$, что $x * a = a * y = b$ является отношением частичного порядка. Обозначим через K_e класс полугрупп упорядоченные отношением ($\leq_{\mathrm{e}}$). Для любого элемента упорядоченной полугруппы определяем следующие множества: $A_a^- = \{x \in A | x \leq a\}$– миноранта, $A_a^+ = \{x \in A | x \geq a\}$– мажоранта элемента a. Множество изоморфное множеству $< N, \leq >$ натуральных чисел с естественным порядком, назовем множеством типа ω.

Определение. *Говорят, что упорядоченная полугруппа аппроксимируема в классе полугрупп K относительно равенство (порядка), если для любых элементов $a, b \in A$, где $a \neq b$ $(a \bar{\leq} b)$, существует полугруппа $B \in K$ и гомоморфизм $\varphi : A \to B$ такие, что $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ $(\varphi(a) \bar{\leq} \varphi(b))$. Если K класс конечных полугрупп, то A называется финитно аппроксимируемой полугруппой.*

Известно, что заданием полугрупп, определяющими неравенствами $\alpha \leq b$ является более общим способом задания полугрупп, чем их задание определяющими равенствами и представляет значительно большой интерес. Для класса упорядоченных полугрупп, если проблема неравенства в полугруппе А алгоритмически разрешима, то алгоритмически разрешима и проблема тождества.

Теорема 1.*Пусть A конечно определенная коммутативная полугруппа из класса K_e. Для полугруппы A алгоритмически разрешима проблема порядка, тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: для любого элемента $a \in A \backslash \{z\}$ множество A_a^- конечно, всякая максимальная цепь из $A \backslash \{z\}$ имеет тип ω (z нуль полугруппы A).*

Теорема 2. *Пусть A конечно-определенная линейно упорядоченная коммутативная полугруппа из класса K_e. Для полугруппы A алгоритмически разрешима проблема порядка тогда и только тогда, когда A является ординальной суммой A_α $(\alpha \in T)$ моногенных полугрупп, где все A_α нильпотентны, кроме A_β (β наибольший элемент), линейно упорядоченное множество T имеет тип ω.*

В некоторых классах полугрупп, например, вполне регулярные инверсные полугруппы отношение канонического порядка ($a \leq b$ тогда и только тогда, когда $e_a * b = b * e_a = a$) является отношением частичного порядка.

Теорема 3. *Пусть K класс конечно–определчнных коммутативных полугрупп с каноническим отношением порядка. Тогда для полугруппы класса K алгоритмически разрешима проблема делимости, для полугруппы класса K алгоритмически разрешима проблема регулярной сопряженности и для полугруппы класса K алгоритмически разрешима проблема вхождения в выпуклые идеалы.*

Литература

1.Мальцев А.И. О гомоморфизмах на конечные группы. Уч. зап. Иванов. под. Ин-та, т. 18, 1958, с. 49-60.

2. Лесохин М.М. Об аппроксимации полугрупп относительно предикатов. Уч.зап. Ленинград. госпедин-та, т. 404, 1970, с. 191-219.

УДК 536.46

Общий вид математической модели горения

Кабилов М.М.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

Приводимые ниже безразмерные уравнения переноса тепла и вещества описывают процесс фильтрационного горения газов в системе координат, движущейся вдоль оси x со скоростью нестационарного горения ϕ'. Первое уравнение системы (1) получено путем суммирования и преобразования уравнений притоков тепла в фазах при равенстве температур пористой среды и газа. Уравнения системы (1), в частности, идентичны с уравнениями переноса тепла и вещества в реагирующих газах ($\varphi = 0$, $\phi' = 1$) и конденсированных сред ($v_1 = 0$, $\phi' = 1$)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \left(\frac{v_1}{1+\varphi} + \phi'\right)\frac{\partial T}{\partial x} + Q \cdot J,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = Le\Delta\eta + (v_1 + \phi')\frac{\partial \eta}{\partial x} - J, \qquad (1)$$

здесь $J = AN\eta \exp N(1 - 1/T)$ – скорость химической реакции; T, η температура среды и доля недостающего компонента; v_1 – нестационарная скорость фильтрации газа; Q- тепловой эффект реакции; Le – число Льюиса.

Условия на бесконечности для системы (1) имеют вид

$$x = +\infty: \quad T = \sigma = \frac{T_0}{T_e}; \quad \eta = 1, \quad x = -\infty: \quad \frac{dT}{dx} = 0; \quad \frac{d\eta}{dx} = 0, \qquad (2)$$

где T_0, T_e – температура среды до и после фронта горения.

На основе этой модели изучена теплодиффузионная устойчивость стационарных режимов фильтрационного горения газов. При этом использовался метод малых возмущений в предположении очень интенсивного межфазного теплообмена, что приводит к вырождению двухтемпературной структуры волны к однотемпературному [1,2]. Как и в [3,4] используется аппроксимация температурной зависимости скорости химической реакции в виде δ – функции. Учитывается коэффициент теплового расширения газов за фронтом горения $\beta = \rho_{10}/\rho_{1e}$, ρ_{10}, ρ_{1e} – плотности смеси газов по разной стороны поверхности фронта горения постоянны. Коэффициенты переноса и теплофизические характеристики фаз предполагается не зависящими от температуры среды и концентрации недостающего компонента. Теплопотери во внешнюю среду отсутствуют.

В результате сделанных предположений, принимая аппроксимации скоростей в виде [3]

$$J \approx ANe^{\frac{N}{2}(T(0,y,z,t)-1)}\delta(x),$$

$$AN = 1, +u_0,$$
$$v_1 = u_0 e^{\frac{N}{2}(T(0,y,z,t)-1)},$$
$$\phi' = e^{\frac{N}{2}(T(0,y,z,t)-1)},$$

где u_0 – безразмерная скорость фильтрации, и условия сшивки параметров получим дисперсионное соотношение для частоты возмущения ω. После преобразования указанное соотношение имеет вид

$$G_3\omega^3 + (3G_3k^2 + G_2)\omega^2 + (3G_3k^4 + 2G_2k^2 + G_1)\omega +$$
$$+ G_3k^6 + G_2k^4 + G_1k^2 + G_0 = 0, \qquad (3)$$

где $k^2 = k_y^2 + k_z^2$ – волновой вектор возмущения,

$$\begin{aligned}
&G_j = 4u_\varphi^{8-2j} g_j, \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ 3\\
&g_0 = \alpha^2\beta - \alpha^2,\\
&g_1 = \alpha^2\beta + (-\alpha^3 + 5\alpha^2 - \alpha)\beta - 5\alpha^2 + 2\alpha^3,\\
&g_2 = \alpha(3-\alpha)\beta^2 + \alpha(-2\alpha^2 + 7\alpha - 1)\beta - \alpha^4 + 6\alpha^3 - 5\alpha^2 - 2\alpha,\\
&g_3 = \beta^2 + (4\alpha - 2)\beta + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1.
\end{aligned}$$

Так как потеря устойчивости стационарного решения происходит при изменении знака вещественной части ω с отрицательного на положительный, применяя теорию алгебры полиномов к уравнению (3) находим соотношение

$$-8g_3^2k^6 - 8u_\varphi^2 g_3 g_2 k^4 - 2u_\varphi^4(g_3g_1 + g_2^2)k^2 + u_\varphi^6(g_3g_0 - g_1g_2) = 0. \qquad (4)$$

В случае положительности левой части соотношения (4), комплексные корны уравнения (3) имеют положительные действительные части, т.е. неустойчивая область значения параметров. Соотношение (4) является кубическим уравнением относительно k^2, где k^2 положительная величина. Тогда условия существования положительных действительных корней уравнения является условием границы устойчивости стационарного режима по отношению к пространственным возмущениям:

$$g_2 < 0 \qquad \text{или} \qquad g_2 > 0, \quad g_0g_3 - g_1g_2 > 0.$$

С помощью этих условий, найденные кривые-границы устойчивости стационарных режимов в частном случае подтверждается результатами численных расчетов других авторов [5]. Заметим, что при $\beta = 1$ уравнение (3) идентичен с уравнением, исследованным в [3]. При продольном рассмотрении возмущений, то есть когда пространственные возмущения отсутствует $k^2 = 0$, из соотношение (4) получим границы устойчивости одномерного распространения волны горения. Относительно число Льюиса Le (отношение коэффициента диффузии недостающего компонента к коэффициенту температуропроводности среды), также получено условия устойчивости.

Литература

1. В.С.Бабкин, Ю.М.Лаевский. ФГВ, 1987, т.270, №5, с.27-44.
2. Р.И.Нигматулин. Динамика многофазных сред. М.:Наука, 1987, ч.1, 464с.
3. B.J.Matkowsky, G.I.Sivashinsky. SIAM Journal Apll.Math.1978, v.35, №, p.465-478.
4. А.П.Алдушин, С.Г.Каспарян. ДАН,1978, т.244, №1, с.67-70.
5. К.Г.Шкадинский, Б.И.Хайкин, А.Г.Мержанов. ФГВ, 1971, №1, с.19-28.

УДК 536.46

Автоматизированное рабочее место специалиста

Кабилов М.М., Джалалов А.Р.
(РТСУ, г. Душанбе)

Отметим, что словосочетание "автоматизированные системы "управления" уже давно ни для кого не секрет, многие говорят сокращенно АСУ. По этой тематике в ВУЗах республики существует специальность, другими словами эта фраза укоренилась в нашем обиходе с момента появления в научных сферах электронно-вычислительных машин. В последнее время все чаще используется другое словосочетание, как информационные системы в экономике, также являющееся общепринятым в интеллектуальных кругах. В литературе эти две фразы понимаются как синонимы. Если раньше называли АСУ, то сейчас ИСЭ. Думается, что все старания и попытки делаются для того, чтобы облегчить труд, найти оптимальный вариант, соответствовать росту и т.д. Поскольку принято

решение информатизации общества, то необходимо, чтобы специалисты всех уровней задумались и старались в автоматизации своего участка деятельности. Без информированности, то есть соответствующей базы данных, без наглядного представления, нельзя ожидать ни в какой области интенсивного роста, оптимального решения и удовлетворительного результата. Отсюда появляется другое словосочетание
“специалист - информатик”, т.е. каждый труженик являющийся специалистом в своей области, одновременно, должен быть знатоком компьютерной и информационной технологии.

На современном этапе, довести до понимания студента или будущего специалиста, как решается задача или в чем состоит проблема, старыми методами нельзя. Необходимо использовать более актуальные виды обучения, наглядные и понятные пособия, автоматизированный процесс изучения различных областей знаний. На местах, необходима создавать АРМ специалиста т.е. создавать автоматизированные системы относительно касающихся проблем. Если такие системы будут созданы, то появляется возможность провести визуальные компьютерные эксперименты научного и учебного характера. Наглядно можно проследить прохождение процесса, явления или распространение субстанции.

В связи с этим на кафедре информатики и информационных систем Российско-Таджикского Славянского университета практикуется создание информационной системы следующих задач, актуальных для народного хозяйства республики:

– обработки данных и изображений литых штифтовых вкладок, вставляемые на жевательные зубы при полном разрушении ең коронковой части;

– моделирования процессов вытеснения газа и нефти в пластах;

– расчета и изображений схода пучка волокон с элемента хлопкоочистительной машины;

– моделирования распространения паводка в горных реках;

– моделирования стационарной структуры волны фильтрационного горения газов в инертной пористой среде.

Рассмотрим подробнее первую задачу. По ряду причин у многих больных коронки запломбированных и вылеченных зубов продолжают разрушаться, и в полости рта остаются корни с практически здоровыми тканями пародонта, которые могут воспринимать функциональную нагрузку. Протезирование с использованием корней дает возможность более эффективно восстановить функцию зубочелюстной системы.

Наиболее эффективным средством восстановления разрушенных жевательных зубов при наличии здоровых корней являются штифтовые конструкции зубных протезов.

В специальной литературе приводится широкий диапазон параметров (длина, толщина) и формы штифтов, основанные на клинических наблюдениях и логических выводах.

Впервые на основе проведенного клинико-морфометрического и математического исследований предложены оптимальные параметры литых культевых штифтовых вкладок на премолярах и молярах. Методом математического моделирования изучено распределение напряжений в твердых тканях жевательных зубов при различных формах, размерах и различных углах наклона литых штифтовых вкладок. Математическая модель конструкции по применению литых штифтовых вкладок при полном разрушении коронковой части зубов, позволяет с помощью ЭВМ проанализировать для каждого конкретного случая различные варианты протезных конструкций и остановить свой выбор на варианте наиболее рациональном для пациента.

Задача программиста для этой конкретной проблемы заключается в том, чтобы наглядно показать пациенту как будет смотреться протез вместо его больного зуба. При этом первоначально надо задать в программе соответствующие параметры: высоты коронковой части зуба, силы и угла падения жевательной нагрузки, угла наклона культевой части вкладки к продольной оси корня зуба и его анатомических особенностей. Программируя задачу, мы можем наблюдать, как меняется форма штифтовой вкладки при изменении одного из этих факторов.

При создании автоматизированной системы для каждой вышеуказанной задачи предполагается создать базу данных. Для наглядного представления ввода и расчета данных создаются формы, для вывода отдельных случаев расчета создаются отчеты и вычисляемые поля. Предполагается производить запросы из создаваемых таблиц. При этом используется язык программирования Visual Basic.

Так как к решению создания автоматизированной системы указанных задач привлекаются студенты, то полученные навыки они могут использовать на местах работы после окончания ВУЗа. Самостоятельно решать новые актуальные для республики задачи на высоком уровне, и тем самым внести свой вклад в информатизации соответствующей области народного хозяйства, а в конечном итоге усовершенствовать информационную технологию.

УДК 517.925

О вариационной задаче Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений в полупространстве

Каримов А.Г.
(КГУ им. Носира Хусрава)

Пусть R_n $n-$мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обозначим $R_n^+ = x : x = (x', x_n) \in R_n, x_n > 0$. Рассмотрим билинейную форму

$$P[U,V] = \sum_{|k|,|l|\le r} \int_{R_n} a_{kl}(x) U^{(k)}(x) \overline{V^{(l)}(x)} dx \qquad (1)$$

Здесь $r-$натуральное число, $k = (k_1, k_2, ..., k_n)$, $l = (l_1, ..., l_n)-$ мультииндексы, $|k| = k_1 + ... + k_n-$длина мультииндекса k, $U^{(k)}(x)-$ обобщенное производное порядка мультииндекса k функции $U(x)$ в смысле Соболева. Пусть функция $\varphi(t) \in c^{\infty}(R_1^+)$ такая, что

$$0 \le \varphi(t) \le 1 \quad \forall t \in R_1^+; \quad \varphi(t) \equiv 1 \quad \forall t \in [0, 1|2] \quad \text{и} \quad \varphi(t) \equiv 0 \quad \forall t \ge 1$$

Следуя работ [1,2] для двух вещественных чисел α, β вводим весовую функцию

$$\sigma_{\alpha,\beta}(t) = \varphi(t) t^{-\alpha} + (1 - \varphi(t)) t^{\beta} (t \in R_1^+)$$

и следующие весовые классы функций $u(x)$, определенные в полупространстве R_n^+

$$L^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+) = \Bigg\{ U(x) : \|U; L^r_{p;\alpha,\beta}(R_n^+)\| =$$

$$= \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{R_n^+} \sigma^p_{\alpha,\beta}(x_n) |U^{(k)}(x)|^p dx \right\}^{1/p} < +\infty \Bigg\},$$

$$W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+) = \big\{ U(x) : \|U; W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)\| =$$

$$= \big\{ \|U; L^p_{p;\alpha}(R_n^+)\|^p + \|U; L^0_{p;\alpha,\gamma}(R_n^+)\|^p \big\}^{1/p} < +\infty \Big\}$$

Здесь $\gamma-$вещественное число и $p \in (1; +\infty)$. Символом $W^{o^r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R_n^+)$ обозначим пополнение класса $C^{\infty}(R_n^+)$ в метрике пространства

$W^{o^r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$, а символ $\left(W^{o^r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)\right)^{'}$ –пространства антилинейных непрерывных функционалов над пространством $W^{o^r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$, наделенной нормой двойственного пространства. Свойство пространства $W^{o^r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$ изучены в работе [2], в частности доказано, что если S – целое число, $0 \leq s \leq r$ и выполнены условия

$$\begin{cases} -d+\frac{1}{2} \notin \{1,2,...,r\}, \beta+\frac{1}{2} \notin \{1,2,...,r\}, \\ -r+\frac{1}{2} < d < -\frac{1}{2}, r-\beta+\frac{1}{2} < s_0, \beta < r-\frac{1}{2}, \end{cases} \tag{2}$$

То существует число $c_s > 0$ такое, что

$$\left\{ \sum_{\lfloor k \rfloor = s} \int_{R^+_n} (\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r+|k|} |u^{(k)}(x)|^2) dx \right\}^{1/2} \leq c_s \|U; L^r_{2;\alpha,\beta}(R^+_n)\| \tag{3}$$

Для всех $U \in c^\infty_0(R^+_n)$ в условиях (2) целое число c_0 такое, что

$$r+\alpha-\frac{1}{2} < s_0 < r+\alpha+\frac{1}{2}. \tag{4}$$

Задача D. *Для заданного функционала* $F \in \left(W^{o^r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)\right)'$ *требуется найти решения* $U(x)$ *уравнения*

$$P[U,V] = < F, V > \forall V \in C^\infty_0(R^+_n)$$

принадлежащее пространству $W^{o^r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)$. *Далее, предположим, что коэффициенты* $a_{kl}(x)$ *билинейной формы (1) удовлетворяют условиям:*

$$|a_{kl}(x)| \leq M\sigma^2_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-2r+|k|+|l|},$$

$$Re \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi_k \overline{\xi_l} \geq M_0 \quad \sigma_{\alpha,\beta}(x_n) \sum_{|k|=r} |\xi|^2 \tag{5}$$

для всех $x \in R^+_n$ *и любого набора комплексных чисел* $\{\xi_k\}_{|k|=r}$

Теорема. *Пусть выполнены условия (2), (4),(5), и пусть* $M_0 - M\sum_{|k|+|l|\leq 2r-1} \sqrt{c_{|k|} \cdot c_{|l|}} > 0$ *где* M_0 *константа из условии (5),* M *–из условии (4) а число* $C_{|k|}$ $(|k| \leq r)$, *такие же как в неравенстве (3). Тогда для любого заданного функционала* $F \in \left(W^{o^r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)\right)'$ *задача* D *имеет единственное решение и справедливо неравенство*

$$\|U; W^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)\| \leq C \cdot \left\| F; \left(W^{o^r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(R^+_n)\right)' \right\|,$$

где число $C > 0$ не зависит от F.

Сформулированная в этой работе теорема является обобщением некоторых результатов работы (1).

Литература

1. Исхоков С.А. // Докл.РАН, 1993,т.330, №4.-с.420-423.
2. Исхоков С.А. //Дифф.уравнения, 1995, т.31, №4. с. 641-653.

УДК 519.87

Коэрцитивные неравенства и разделимость нелинейных дифференциальных операторов второго порядка в весовом пространстве

Каримов О.Х.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

Пусть $k(x)$ – положительная функция, определенная в R^n и l – некоторое натуральное число. Символом $L_{2,k}(R^n)^l$ – обозначим пространство вектор-функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_l(x))$, $u_j(x) \in L_2(R^n)$, $j = \overline{1,l}$ с конечной нормой

$$\|u\|_{L_{2,k}(R^n)^l} = \left(\sum_{j=1}^{l} \int_{R^n} k(x) \, |u_j(x)|^2 \right)^{1/2}$$

.

В пространстве $L_{2,k}(R^n)^l$ рассмотрим оператор второго порядка с переменными коэффициентами

$$Lu = L_0 u + V(x,u)u, \quad L_0 u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad x \in R^n$$

Коэффициенты $a_{ij}(x)$ оператора L_0 являются квадратными матрица–функциями порядка l с элементами из класса $C^1(R^n)$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x), \ Im a_{ij}(x) \equiv 0$$

$$|a_{ij}(x)| \leq \sigma_1, \quad |\nabla a_{ij}(x)| \leq \sigma_2, \ \left(\forall x \in R^n, i, j = \overline{1,n}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} |s_i|^2_{C^l} \leq \chi_1 \sum_{i=1}^{n} < a_{ij}(x)s_i, s_j >_{C^l} \ \forall x \in R^n, \forall s = \{s_j\}_{j=1}^{n}, s_i \in C^l.$$

Положительные постоянные $\sigma_1, \sigma_2, \chi_1$ в этих условиях не зависят от x и s.

Следуя работам [1,2] назовем оператор Lu разделимым в весовом пространстве $L_{2,k}(R^n)^l$, если для каждой вектор-функций $u(x) \in L_{2,k}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ таких, что $Lu \in L_{2,k}(R^n)^l$ выполняются включения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in L_{2,k}(R^n)^l, \quad V\left(x, u(x)\right) u(x) \in L_{2,k}(R^n)^l.$$

Предположим, что значения матрица–функции $V(x,\omega)$, $x \in R^n$, $\omega \in C^l$ являются квадратными положительно определенными эрмитовыми матрицами порядка l. Вводим обозначения

$$F(x,\omega) = F(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_l,\eta_1,\ldots,\eta_l) = V^{1/2}(x,\omega),$$

$$Q(x,\omega) = Q(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_l,\eta_1,\ldots,\eta_l) = F^2(x,\omega),$$

где $\xi_j = Re\omega_j$, $\eta_j = Im\omega_j$ и $\omega_1,...,\omega_l$ координаты точки $\omega \in C^l$.

Определение *Будем говорить, что матрица функция* $V(x,\omega)$, ($\omega \in C^l, x \in R^n$) *принадлежит классу* $T^{n,l}_{\chi,\sigma,\delta,\gamma}$ *если выполняются следующие условии*

$$I. \quad \sum_{i=1}^{n} \left\| F^{-1/2}(x,\omega)\frac{\partial}{\partial x_i}(F(x,\omega))F^{-3/2}(x,\omega)\right\|_{C^l} \leq \chi,$$

$$II. \left\|\sum_{j=1}^{l}\left(\mu_j F^{-1/2}(x,\omega)\frac{\partial}{\partial \xi_j}(F(x,\omega)\omega + \nu_j F^{-1/2}(x,\omega)\frac{\partial}{\partial \eta_j}(F(x,\omega))\omega\right)\right\|_{C^l} \leq$$

$$\leq \sigma \left\|F^{1/2}(x,\omega)\Omega\right\|_{C^l}, \forall x \in R^n, \text{и}\, \forall \Omega = (\mu_1 + i\nu_1, \ldots, \mu_l + i \ni_l) \in C^l,$$

$$III. \quad \left\|\sum_{j=1}^{l}\left\{\mu_j F^{-1}(x,\omega)\frac{\partial}{\partial \xi_j}(Q(x,\omega))\omega + \nu_j F^{-1}(x,\omega)\frac{\partial}{\partial \eta_j}Q(x,\omega)\omega\right\}\right\|_{C^l} \leq$$

$$\leq \delta \left\|F(x,\omega)\Omega\right\|_{C^l},$$

$$IV. \quad \sum_{i=1}^{n}\left\|Q^{-1/2}(x,\omega)\frac{\partial}{\partial x_i}(Q(x,\omega)Q^{-1}(x,\omega)\right\|^2_{C^l} \leq \gamma, \forall x \in R^n, \forall \omega \in C^l.$$

Теперь сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Пусть матрица-функция* $V(x,\omega) \in T^{n,l}_{\chi,\delta,\delta,\gamma}$, ($x \in R^n$, $\omega \in C^l$) *коэффициенты* $a_{ij}(x)$ *удовлетворяют условиям I, II, III и пусть весовая функция* $k(x) \in C^1(R^n)$ *и* $\forall x \in R^n$, $\omega \in C^l$ *удовлетворяет неравенстве*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial k(x)}{\partial x_i} k^{-1} Q^{-1/2}(x,\omega) \right\| \le \delta_3.$$

Тогда при выполнении условий

$$\chi_1\delta_1 < 2, \quad 0 < \delta_3 < 2, \quad \chi + \delta_3 < \frac{1}{\delta_1\chi_1 n^2}, \quad 0 < \delta < \frac{1}{\delta_1\chi_1 n} - \frac{n(\gamma+\delta_3)}{2}$$

нелинейный оператор Lu *разделяется в весовом пространстве* $L_{2,k}(R^n)^l$ *и для каждого решения* $u(x) \in L_{2,k}(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ *уравненийя* $L_0u(x) + V(x,u(x))u(x) = f(x)$, *где* $f(x) \in L_{2,k}(R^n)^l$, *выполняется следующее неравенство*

$$\|V(x,u)u\|_{L_{2,k}(R^n)^l} + \sum_{i=1}^{n} \left\| V^{1/2}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_{2,k}(R^n)^l} +$$

$$+\|L_0u\|_{L_{2,k}(R^n)^l} \le M\|f\|_{L_{2,k}(R^n)^l},$$

где число $M > 0$ *и от вектор–функции* $f(x)$ *и* $u(x)$ *не зависит.*

Литература

1.Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических дифференциальных операторов второго порядка// ДАН СССР, 1988, т.301, с.1033-1036.

2. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды МИАН, 1984, т.170, с37-76.

УДК 511.

О сферичном клеточно-подобном 2-мерном континууме Пеано

Каримов У.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

Под сферичным пространством подразумевается пространство одна из гомотопических групп, которого нетривиальна. Пространство называется клеточно-подобным, если любое его отображение в полиэдр гомотопно постоянному отображению. Континуум Пеано - это любое компактное, связное, локально компактное метрическое пространство.

Пусть G мультипликативная группа. Под коммутатором элементов x и y группы G подразумевается элемент $xyx^{-1}y^{-1} \in G$. Коммутаторной длиной $cl(g)$ элемента $g \in G$ называется минимальное число n такое, что $g = \prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i]$. Если такого числа нет, то коммутаторная длина элемента считается равной $cl(g) = \infty$.

Пространство X строится следующим способом. Рассмотрим замкнутую топологическую синусоиду на квадрате $I^2 = [0,1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \subset \mathbf{R}^2$:

$$T = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 | \ 0 < x \leq 1, y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) \right\} \cup (\{0\} \times [-1,1]).$$

Пусть S^1 окружность. Зафиксируем любую из ее точек s_0 в качестве базисной точки. Рассмотрим топологическую сумму I^2 и $T \times S^1$. Пространство X получается в результате отождествления точек (t, s_0) и $t \in T \subset I^2$ и отождествлением множеств $\{t\} \times S^1$ с t когда $t \in 0 \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \subset I^2$.

Очевидно, X клеточно-подобный континуум Пеано.

Пусть p проекция X на квадрат I^2, который мы рассматриваем как подпространство плоскости $\mathbf{R}^2$ с осями OX и OY: $I^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \ y \in [-1/2, 1/2], x \in [0,1]\}$, .

Пусть $I^2_+ = \{(x,y) \in I^2 | \ y \geq 0\}$, $I^2_- = \{(x,y) \in I^2 | \ y \leq 0\}$, $A^+ = p^{-1}(I^2_+)$, $A^- = p^{-1}(I^2_-)$.

Так как пара $\{A^+, A^-\}$ вырезаемая, к нее применима формула Майера-Виеториса:

$$H_2(X) \xrightarrow{\delta} H_1(A^+ \cap A^-) \xrightarrow{(i_1, \ i_2)} H_1(A^+) \oplus H_1(A^-).$$

Очевидно, пространства $A^+ \cap A^-, A^+$ и A^- гомотопически эквивалентны Гавайской серге. Для доказательства $H_2(X) \neq 0$ достаточно доказать, что $i = (i_1, \ i_2)$ не мономорфизм.

Это вытекает из следующих лемм:

Лемма 1. *Для любых элементов $\{b_i\}_{i=1}^n$ любой группы G существуют элементы $\{x_i\}_{i=1}^n$ группы G такие, что:*

$$b_1 b_2 \cdots b_{2n} b_1^{-1} b_2^{-1} \cdots b_{2n}^{-1} = [x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}].$$

Если группа G свободна и множество элементов $\{b_i\}_{i=1}^n$ образует базис группы G тогда $\{x_i\}_{i=1}^n$ также является базисом группы G.

Лемма 2. *Если F свободная группа с базисом $x_1, x_2, \dots x_{2n}$ и элементы $u_1, u_2, \dots, u_{2m}$ группы F таковы, что*

$$[x_1, x_2][x_3, x_4]\cdots[x_{2n-1}, x_{2n}] = [u_1, u_2][u_3, u_4]\cdots[u_{2m-1}, u_{2m}]$$

тогда $m \geq n$.

Проблема. *Существует ли не стягиваемый континуум Пеано, все гомотопические группы которого (в том числе и фундаментальная группа) тривиальны?*

УДК 517.95

Исследование краевой задачи со сдвигом Карлемана для системы уравнений первого порядка составного типа

Козиев А.
(Институт математики АН РТ , г.Душанбе)

Пусть G - ограниченная область с границей Γ и пусть $\beta(t)$ - гомеоморфно отображает границу Γ на себя и изменяет ориентацию. Обозначаем через γ_1 верхнюю, а через γ_2 нижнюю часты границы Γ области G. $\beta(t)$ отображает каждую точку $t \in \gamma_1$ в некоторую точку $\tau = \beta(t) \in \gamma_2$ и наоборот, причем $\beta(t) \neq 0$ на Γ. Далее, пусть $\alpha(t)$ является прямым или обратным сдвигом, удовлетворяющим условию Карлемана $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$, причем $\alpha'(t) \neq 0$.

Рассмотрим систему уравнений первого порядка составного типа [1]

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Re(A(z)w(z)), \quad \frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = B(z)u(z) + C(z)\overline{w(z)}, \tag{1}$$

где $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ - заданные комплекснозначные функции класса $C_\nu(\overline{G})$, $u(z)$ - вещественная, $w(z)$ - комплекснозначная функция.

Задача $A(\alpha)$**.** *Требуется найти решение $u(z)$, $w(z)$ системы (1) в области G, принадлежащие классу $C(G)$ и удовлетворяющие краевым условиям*

$$a_{00}(t)u(t) + \sum_{\nu=0}^{1} Re[b_{0\nu}(t)w(\alpha_\nu(t))] = h_0(t), \quad t \in \Gamma,$$

$$a_{10}(t)u(t)+\sum_{\nu=0}^{1}Re[b_{1\nu}(t)w(\alpha_\nu(t))]=h_1(t),\quad t\in\gamma_1, \tag{2}$$

где $a_{00}(t),\quad b_{0\nu}(t),\quad h_0(t); a_{10}(t),\quad b_{1\nu}(t),\quad h_1(t)$ *- заданные, соответственно, на контуре* Γ *и на дуге* γ_1*, кусочно непрерывные по Гельдеру функции, причем* $a_{00}(t),\quad a_{10}(t),\quad h_0(t),\quad h_1(t)$ *- вещественные.*

Эта задача в случае, когда члены со сдвигом отсутствуют и коэффициенты краевой задачи (2) всюду непрерывны по Гельдеру, изучена А.Д.Джураевым, а в случае, когда члены со сдвигом присутствуют и коэффициенты краевого условия всюду непрерывны по Гельдеру изучена мною [2].

Всюду в дальнейшем выполнены условия:

1) при $t\in\gamma_1,\ \ \Delta(t)=\begin{vmatrix} a_{00} & b_{00}\\ a_{10} & b_{10}\end{vmatrix}\neq 0,$ при $t\in\gamma_2,\ \ b_{0\nu}\neq 0,\ \ \nu=0,1,$

2) $a_{00}(\mu_j)=0,\quad a_{10}(\mu_j)=1,\quad j=1,2.$

При этих условиях задача $A(\alpha)$ эквивалентным образом сводится к следующему сингулярному интегральному уравнению с двумя сдвигами и кусочно непрерывными по Гельдеру коэффициентами:

$$K(\varphi)=\sum_{\nu=0}^{1}\Bigg\{Rea_\nu^\star(t)\varphi[\alpha_\nu(t)]+Reb_\nu^\star[\alpha_\nu(\beta(t))]+$$

$$+\frac{Ima_\nu^\star(t)}{\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\alpha(t)}+\frac{Imb_\nu^\star(t)}{\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\alpha(\beta(t))}\Bigg\}+ \tag{3}$$

$$+T\varphi=h^\star(t)\sum_{k=1}^{N+1}c_kg_k(t),\quad t\in\Gamma,$$

где

$$a_\nu^\star(t)=\begin{cases} a_\nu(t), & t\in\gamma_1\\ b_0(t), & t\in\gamma_2\end{cases},\quad b_{0\nu}^\star(t)=\begin{cases} 0, & t\in\gamma_1\\ -a_{00}(t)\alpha_\nu(\beta(t)), & t\in\gamma_2\end{cases},$$

T - некоторый вполне непрерывный оператор, $h^\star(t)$ - известная функция выражающаяся через правые части и коэффициенты краевых условий (2), $g_k(t)$ - известная функция кусочно непрерывно по Гельдеру и независящая от правых частей задачи. Так как поставленная задача эквивалентным образом приводится к оператору K, то используя результаты Ю.И.Карловича [3], приходим к заключению, что задача $A(\alpha)$ нетерова и ее индекс вычисляется по формуле

$$æ = \frac{1}{2} Inddets(t) + 1,$$

где $s(t)$ - квадратная матрица, выражающаяся через коэффициенты краевых условий.

Литература

1. Джураев А.Д. Системы уравнений составного типа. М.: Наука, 1972г. 224с.
2.Козиев А. Доклады АН Тадж. ССР, 1979г. Т.22,№1,с.7 - 11.
3. Карлович Ю.И. ДАН СССР, - 1973г. Т.218,№1,с.272.

УДК 517.968.2

Явное решение некоторых двумерных интегральных уравнений с ядром Бергмана

Мамадкаримова М.
(Хорогский госуниверситет, г. Хорог)

В единичном круге D комплексной плоскости $z = x + iy$ рассмотрим следующее интегральное уравнение

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + \frac{c(z)}{\pi} \iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1 - z\bar{\zeta})^2} + + \frac{d(z)}{\pi} \iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1 - \bar{z}\zeta)^2} +$$

$$+ \frac{e(z)}{\pi} \iint\limits_D \frac{\bar{f(\zeta)}ds_\zeta}{(1 - z\bar{\zeta})^2} + + \frac{q(z)}{\pi} \iint\limits_D \frac{\bar{f(\zeta)}ds_\zeta}{(1 - \bar{z}\zeta)^2} = g(z), z \in \bar{D}, \qquad (1)$$

в котором $a(z), c(z), d(z), e(z), q(z)$ - заданные в замкнутом единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ комплекснозначные непрерывные функции. Комплекснозначные непрерывные функции $g(z)$ и $f(z)$ соответственно задаются и ищутся в пространстве $L^2_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$:

$$L^2_{\beta-\frac{2}{p}}(D) = f(z) : |z|^{\beta-\frac{2}{p}} f(z) = F(z) \in L^p D, \|f\|^2_{\beta-\frac{2}{p}} D = \|F\|_{L^p D},$$

где $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$.Из результатов работа [1] следует, что для нетеровости оператора A в $L^2_{\beta-\frac{2}{p}} D$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$a(z) \neq 0, z \in \bar{D}$$

и

$$\Delta(t)=(a(t)+c(t))(a\bar(t)+d\bar(t))-e(t)q\bar(t)\neq 0, t\in\Gamma.$$

В предлагаемой работе найден регуляризатор оператора A, а в случае постоянных коэффициентов уравнение (1) решен в замкнутом виде.

$$f(z)=a_2 g(z)+b_2\overline{g(z)}+\frac{c_2}{\pi}\iint\limits_D \frac{g(\zeta)ds_\zeta}{(1-z\bar{\zeta})^2}+\frac{d_2}{\pi}\iint\limits_D \frac{g(\zeta)ds_\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)^2}+$$

$$+\frac{e_2}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)}ds_\zeta}{(1-z\bar{\zeta})^2}+\frac{q_2}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)}ds_\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)^2}+\frac{\alpha_2}{\pi}\iint\limits_D g(\zeta)ds_\zeta+$$

$$+\frac{\tau_2}{\pi}\iint\limits_D \overline{g(\zeta)}ds_\zeta, \quad z\in\overline{D},$$

где константы $a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, q_2, \alpha_2, \tau_2$ определяются через исходные коэффициенты.

Обобщение. Полученные выше результаты обобщаются на уравнение

$$(A_1 f)(z)\equiv a(z)f(z)+b(z)\overline{f(z)}+\frac{c(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1-z\bar{\zeta})^2}+$$

$$+\frac{d(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)^2}+\frac{e(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{f(\zeta)}ds_\zeta}{(1-z\bar{\zeta})^2}+$$

$$+\frac{q(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{f(\zeta)}ds_\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)^2}=g(z), \quad z\in\overline{D}, \tag{2}$$

где заданная функция $b(z)$ также, как и остальные коэффициенты из (2) непрерывна в $\overline{D}$.

Литература

1. Джангибеков Г. Нетеровость и индекс некоторых двумерных снгулярных интегральных операторов // Изв. Вузов. серия математика. 1991. №1. с. 19-28.

2. Комяк Н.Н. // Об одном классе двумерных сингулярных уравнений с ядром Бергмана.// ДАН БССР. 1979. т. 23. №1. с. 8-11.

УДК 511

Изменение знака $S(t)$ на коротких промежутках

Мирзоабдугафуров К.И
(Институт математики АН РТ)

Определение 1. *Для вещественного t, отличного от ординаты нуля дзета-функции Римана $\zeta(s)$, положим*

$$S(t) = \frac{1}{\pi}\arg\zeta\big(\frac{1}{2}+it\big)$$

где $\arg\zeta(\frac{1}{2}+it)$ получается непрерывным продолжением $\arg\zeta(s)$ вдоль ломанной линии, начинающейся в точке $s=2$ ($\arg\zeta(2)=0$), идущей к точке $s=2+it$ и затем к точке $s=0,5+it$. Если же $t-$ мнимая часть нуля $\zeta(s)$, то

$$S(t) = \lim_{\delta\to+0}\frac{1}{2}(S(t+\delta)+S(t-\delta)).$$

Формулой Римана-Мангольдта функция $S(t)$ связана числом $N(t)$ комплексных нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0\le Res\le 1,\ 0<Ims\le t$ (при условии, что вклад в $N(t)$ каждого из нулей с ординатой t равен $0,5$).

Согласно этой формуле,

$$N(t) = \frac{t}{2\pi}\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(t) + \Delta(t),$$

где последнее слагаемое - гладкая функция порядка t^{-1}. Следствием этого равенства является тот факт, что $S(t)$ терпит разрывы в точках, совпадающих с ординатами комплексных нулей $\zeta(s)$, причем при переходе через точку разрыва $S(t)$ совершает скачок,равной сумме кратностей нулей дзеты, имеющих эту точку своей ординатой. На всяком промежутке непрерывности (γ,γ'), где γ,γ'–соседние ординаты таких нулей,функция $S(t)$ является монотонно убывающей с производной $-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{t}{2\pi}+O(t^{-2})$.

В 1913г. Г.Бором и Э.Ландау[1] было установлено, что величина $S(t)$ с ростом t может принимать сколь угодно большие по модулю как положительные, так и отрицательные значения. Отсюда следует, что функция $S(t)$ при $t\to\infty$ меняет свой знак бесконечно много раз.

Определение 2.*Для положительного T символом $M(T)$ обозначим количество точек перемены знака $S(t)$ на промежутке* $(0,T)$.

В 1946г. А.Сельберг [2] разработал новый метод исследования $S(t)$, который позволил свести задачу об оценке числа точек перемен знака этой функции на промежутке $(T, T+H)$ к оценке интегралов

$$I(\alpha)=\int\limits_{T}^{T+H}|S(t)|^{\alpha}dt, \qquad J(\alpha)=\int\limits_{T}^{T+H}\Big|\int\limits_{0}^{h}S(t+u)du\Big|^{\alpha}dt,$$

называемых моментами $S(t)$ $(\alpha, h>0)$. Если длину H промежутка выбрать равной $T^{0,5+\varepsilon}$, где $\varepsilon-$ сколь угодно малое фиксированное положительное число, то метод А.Сельберга приводит к оценке вида

$$M(T+H)-M(T)\geq H(\ln T)^{1/3}e^{-c_1\sqrt{\ln\ln T}},\ c_1>0.$$

Карацуба А.А. и Королев М.А. с помощью уточнение этого метода А.Сельберга [3-7], с одной стороны, сократили длину H исследуемого промежутка и с другой стороны, заменили правую часть последнего неравенства более меньшей величиной, т.е. доказали, что если $H\geq T^{27/82+\varepsilon}$, то справедливо соотношение

$$M(T+H)-M(T)\geq H(\ln T)e^{-c_2\frac{\ln\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}},\ c_2>0.$$

Задачу об оценке числа точек перемен знака этой дзета–функции Римана в промежутке $(T, T+H)$ критической прямой удалось нам свести к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки тригонометрический сумм.

Определение 3. *Если* $B\geq 1$, $0<h\leq B$, $f(u)\in C^{\infty}(B,2B)$, $A\geq 1$,

$$AB^{i-r}\ll|f^{(r)}(u)|\ll AB^{i-r},\ r=1,2,3,\cdots,$$

где постоянная под знаком $\ll$ *зависит только от* r, *и имеет место оценка*

$$\sum_{B\leq n\leq B+h}e(f(n))\ll A^kB^{\lambda},\quad 0\leq k\leq 0,5\quad 0,5\leq\lambda\leq 1,$$

то пара $(k;\lambda)$ *называется экспоненциальной парой.*

Тривиальная оценка показывает, что (0,1)является экспоненциальной парой. E. Phillips [9] показал, что если $(k;\lambda)$экспоненциальная пара, то

$$A(k;\lambda)=\left(\frac{k}{2k+2},\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2k+2}\right)\qquad (A-\text{процесс})$$

$$B(k;\lambda)=(\lambda-0.5,\quad k+0.5)\qquad (B-\ \text{процесс})$$

также являются экспоненциальными парами.

Теорема *Пусть* (k,λ) *– произвольная экспоненциальная пара,* $\theta(k;\lambda)=\dfrac{k+\lambda}{2(k+1)}$, ε *- произвольное положительное число, не превосходящее* 0.001, $T\geq T_0(\varepsilon)>0$, $H=T^{\theta(k;\lambda)+\varepsilon}$. *Тогда существует положительная постоянная* $c=c(\varepsilon)$ *такая, что*

$$M(T+H)-M(T)\geq H(\ln T)e^{-c\frac{\ln\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}},\ c>0.$$

Из работ [7–8] следует, что

$$\theta_0=\min_{k,\lambda}\theta(k,\lambda)=\min_{k,\lambda}\frac{k+\lambda}{2k+2}\leq\frac{7}{22}=\frac{1}{3}-\frac{1}{66}.$$

При доказательстве основной теореме мы существенно пользуемся методами работ А.А.Карацубы и Королева М.А.[3-7], в которых соответственно, доказана задача об оценки числа точек перемен знака $S(t)$ в коротких промежутках $(T,T+H)$ критической прямой и работой З.Х. Рахмонова [10] в котором доказана плотностная теорема для нулей дзета функции Римана в коротких прямоугольниках критической полосы.

Литература

1. Bohr H., Landau E. Beiträge zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion. // Math.Ann. 74(1913). №1. S. 3-30.
2. Selberg A. Contributions to the theory of the Riemann zeta-function //Arch.Math.Naturvid. 48 (1946). №5. S.89-155.
3. Карацуба А.А. О функции $S(t)$// Изв. РАН. Сер. матем. 60(1996). №5. с. 27-56.
4. Королёв М.А. Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 239(2002) с. 215-238.
5. Королёв М.А. О числе перемен знака функции $S(t)$ на коротком промежутке // ДАН. 382(2002). №4. с.446-447.
6. Королёв М.А. Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой // Изв.РАН. Сер.матем.67(2003). №2.с. 21-60.
7. Королёв М.А. О поведении функции $S(t)$ на коротких промежутках //ДАН. 390(2003) №5. с. 588-589.
8. Iwaniec H and Mozzochi I. –J. Number Theory 29 (1988), 60–93.
9. Phillips E. Quart. J. Math. (Oxfort), 1933, v. 4, 205–225.
10. Рахмонов З.Х. УМН, 1994, т. 49, вып. 1, стр. 161-162.

УДК 519.6

Об одном алгоритме решения стохастической транспортной задачи

Мирзоахмедов Ф.М.
(Института экономики Таджикистина, г.Душанбе)

На практике очень часто оказывается, что такие показатели, как спрос на продукт и объем поставки продукта, в различных пунктах подвержены воздействию случайных факторов. В связи с этим возникает необходимость постановки, исследования и решения стохастической транспортной задачи, учитывающей случайный характер указанных показателей. В работе исследуется задача, являющаяся обобщением стохастической транспортной задачи, рассмотренной в работах [1]. Для ее решения применен общий метод стохастического программирования, разработан специальный алгоритм, учитывающий особенности рассматриваемой задачи, и исследованы условия оптимальности.

Введем обозначения: i–индекс пункта поставки (хранения); j–индекс пункта потребления; $c_{i,j}$–удельные затраты по перевозке однородного продукта из i–го пункта в j–й; $a_i(\theta)$–случайный объем поставки в i–м пункте (θ–элементарное событие вероятностного пространства $(\Theta, \Im, P)$); $b_j(\theta)$–случайный спрос в j–м пункте; α_j^+, α_j^-–удельные издержки и потери связанные соответственно с избытком и дефицитом перевозимой продукции в j–м пункт потребления; β_i^+ ,β_i^-–удельные издержки и потери связанные, соответственно, с дополнительным производством и недоиспользованием мощности в i–м пункте поставки; x_{ij}–объем перевозки однородной продукции из i–го пункта поставки в j–й пункт потребления.

Поскольку спрос в пунктах потребления и мощности поставщиков – случайные величины, то неизбежно возникают дополнительные затраты, связанные, с одной стороны, спроса и предложением с другой-дисбалансом мощности и объцма вывозимой продукции. Таким образом, задача состоит в том, чтобы выбрать такие объемы первозок $x = (x_{i,j})_{i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n}}$, которые минимизировали бы сумму транспортных расходов и ожидаемых (математическое ожидание) убытков, т.е.

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} +$$

$$+ E\sum_{j=1}^{n}\max\left\{\alpha_j^+\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - b_j(\theta)\right),\ \alpha_j^-\left(b_j(\theta) - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)\right\}$$

$$+ E\sum_{i=1}^{m}\max\left\{\beta_i^+\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_i(\theta)\right),\ \beta_i^-\left(a_i(\theta) - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\left(\int\limits_{0}^{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}} d_j^+\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - b_j(\theta)\right)P(db_j(\theta))\right) +$$

$$+ \int\limits_{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}}^{\infty} d_j^-\left(b_j(\theta) - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)P(db_j(\theta)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\left(\int\limits_{0}^{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}} p_i^+\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_i(\theta)\right)P(da_i(\theta) +\right.$$

$$\left. + \int\limits_{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}^{\infty} p_i^-(a_i(\theta) - \sum_{j=1}^{n} x_{ij})P(da_i(\theta)\right) \to \min \quad (1)$$

при

$$x_{i\,j} \geq 0, \qquad (i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}) \tag{2}$$

где E–знак математического ожидания.

Задача (1)-(2) является частным случаем одноэтапной задачи стохастического программирования [2].

Для решения этой задачи можно применить прямые вероятностные методы стохастического программирования, в частности метод проекций стохастических квазиградиентов [1]. Этот метод определяется следующим рекуррентным соотношением: $x_{ij}^{s+1} = \pi_X(x_{ij}^S - p_s\gamma_s\xi_{ij}^S), \quad s = 0,\, 1, \ldots.$

Здесь $\pi_X(y_{ij}^S)$- оператор проектирования точки $y_{ij}^S = x_{ij}^S - \rho_S\gamma_S\xi_{ij}^S,$ на множество X, определяемое условием (1); ρ_s- шаговый множитель; γ_s- нормирующий множитель; ξ^s- вектор стохастического субградиента, т.е.

$$E(\xi^s/x^0,...,x^s) = \hat{F}_x(x^s)$$

$$(\hat{F}_x(x^S)) - \text{субградиентфункции} \quad F(x)\text{вточке} \quad x^s.$$

Для задачи (1), (1) можно построить стохастический субградиент, пользуясь правилами вычисления этих векторов и спецификой целевой функции. При этом каждая компонента вектора $\xi^s = (\xi^s_{ij})_{i=\overline{1,m};j=\overline{1,n}}$ определяется следующим образом:

$$\xi^s = c_{ij} + \begin{cases} \alpha_j^+ + \beta_i^+, & \sum_{i=1}^m x_{ij}^S \geq b_j(\theta^s), \quad \sum_{j=1}^n x_{ij}^S \geq a_i(\theta^s); \\ +\alpha_j^+ - \beta_i^-, & \sum_{i=1}^m x_{ij}^S \geq b_j(\theta^s), \quad \sum_{j=1}^n x_{ij}^S < a_i(\theta^s); \\ -\alpha_j^- - \beta_i^+, & \sum_{i=1}^m x_{ij}^S < b_j(\theta^s), \quad \sum_{j=1}^n x_{ij}^S \geq a_i(\theta^s); \\ -\alpha_j^- - \beta_i^-, & \sum_{i=1}^m x_{ij}^S < b_j(\theta^s), \quad \sum_{j=1}^n x_{ij}^S < a_i(\theta^s), \end{cases}$$

где $a_i(\theta^s)$, $b_j(\theta^s)$- независимые наблюдения случайных величин $a_i(\theta)$и $b_j(\theta)$ на s-й итерации и $i = \overline{1.m}$, $j = \overline{1,n}$.

В настоящее время разработаны общие методы решения задач стохастического программирования. Однако остается актуальной проблема разработки алгоритмов решения прикладных задач стохастического программирования с учетом их особенностей.

Для решения поставленной задачи (1), во многих случаях можно применить метод, учитывающий специфику этой задачи и позволяющий непосредственно вычислить точное значение целевой функции и субградиента. Использование данного подхода позволяет сконструировать специальный экономный метод решения стохастической производственно - транспортной задачи.

В дальнейшем представляет интерес построение и изучение более сложных моделей, в частности стохастических моделей совместного поставки и транспортировки, стохастических моделей с адаптацией.

Литература

1. Мирзоахмедов Ф. Математические модели и методы уравления производственном с учетом случайных факторов. Киев, “Наукова думка,” 1991, 240с.

2. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976. 240 с.

УДК 517.9

О двух выдающихся научных достижениях сделанных за 1991 - 2006г.г. в Институте математики Академии наук Республики Таджикистан

Михайлов Л.Г.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

Явление М.В.Келдыша [Доклады АН СССР,1951, т.77,№2]: для д.у.

$$y^m u''_{yy} + u''_{xx} + a(x,y)u'_x + c(x,y)u = 0 \tag{1}$$

в некоторых случаях нельзя задавать значения искомой функции $u(x,0)$ на участке l границы области, где происходит вырождение д.у. (1), а можно только требовать ее ограниченности (задача E), тем самым для (1) может оказаться корректной не задача Дирихле, а задача E.

В ряде публикаций Л.Г. Михайлова за 1991 - 2006гг. [1]- [9] в том же журнале Доклады АН СССР (или России) было установлено (ОТКРЫТИЕ 1): подобными явлению М.В. Келдыша свойствами обладают любые д.у.,испитывающие вырождение порядка до нулевого, причем глубинные причины этого лежат в некоторых свойствах всего класса дифференцируемых функций с сингулярными точками. Возникшей серии было придано естественное наименование Сингулярный Анализ, а центральную позицию в нем заняло свойство зануления вырождающихся д. - операторов:

- задавая функции $y(x) \in C^m_{(0,1]}$ и допуская их неограниченность в точке $x = 0$, будем допустимый их рост характеризовать условиями $\lim\limits_{x\to 0} y(x)/\ln\frac{1}{x} = 0$ (класс S), либо $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha y(x) = 0$ (класс $S_{(0,\alpha)}, \alpha >$ 0).Тогда:

$1^0_{(\alpha)}$, если для $y(x) \in C^1_{(0,1]} \bigcap S_{(0,\alpha)}, \quad \alpha \geq 0$, существует конечный $\lim\limits_{x\to 0} x^{1+\alpha} y'(x)$, то необходимо он равен нулю.

$1^{(m)}_{(\alpha)}$, если для $y(x) \in C^m_{(0,1]} \bigcap S_{(0,1)}, \quad \alpha \geq 0$, существует конечный $\lim\limits_{x\to 0} x^{m+\alpha} y^{(m)}(x)$, то необходимо равен нулю он сам, а вместе с ним также все предшествующие пределы (т.е. $m-1, \ \cdots, \ 2, \ 1$).

Аналогичные свойства зануления имеют место как для д. - оператора Эйлера, так и для вырождающихся д. - операторов Коши - Римана и Лапласа.

В ОТКРЫТИЕ 1 вкючаются, конечно, разработки новых методов решения тех или иных вырождающихся д.у. На необходимость изучения д.у.

$$-x^{1+\alpha}y'_x = f(x,y), \quad \alpha \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < y < +\infty \tag{2}$$

указывали еще Э. Пикар и Г. Фубини. Нами были установлены [6], [7]:

Лемма 1. *Если $f(x,y) \in C$ и решение д.у. (2) $y(x) \in C_{[0,1]}$, то необходимо должно быть $f(0,y_0) = 0$, где $y_0 = y(0)$.*

"Наиболее интригующий вопрос"о задаче Коши $y(0) = \overline{y}$ получает отрицательный ответ, если $f(0,\overline{y}) \neq 0$ и положительный, если только $f(0,\overline{y}) = 0$.

Лемма 2. *Если существует $\lim\limits_{x\to 0}[x, y(x)] = f_0$, где $f_0 \neq \pm\infty$ и $f_0 \neq 0$, то для таких решении (2) необходимо должно быть: либо $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha y(x) = f_0/\alpha$ (при $\alpha > 0$), либо $\lim\limits_{x\to 0} y(x)/\ln\frac{1}{x} = f_0$ (при $\alpha = 0$).*

Нами разработан метод построения решений д.у. (2): производя первую замену $\eta(x) = F'[y(x)]$, где $F' = 1/f(0,y)$, придем к д.у. $-\eta'_x = x^{-1-\alpha} + f_1[x, F^{-1}(\eta)]$, а также второй замены $\eta(x) = 1/\alpha x^{-\alpha} + v(x)$, придем к интегральному уравнению для $v(x) \in C_{[0,1]}$.

Открытие 2. Теорема о вычетах для полных дифференциалов с сингулярными точками. В работе [9] теорема сформулирована для общего случая (с произвольным конечным числом сингулярных точек). Здесь мы ограничимся одной сингулярной точкой $z = 0$ $(z = x + iy = re^{i\varphi})$. Если нам задан полный дифференциал

$$du = r^{-n}[a(x,y)dx + b(x,y)dy] = r^{-n}[p(r,\varphi)dr + q(r,\varphi)d\varphi],$$

и если $p, q \in C^n$, то вычетом будет

$$Res_{z=0}du = \frac{1}{n-1}\left[\frac{\partial^{n-1}q(r,\varphi)}{\partial r^{n-1}}\right]_{r=0}.$$

Литература

1. Михайлов Л.Г. – ДАН СССР, 1991г., т.319, №1, с.
2. Михайлов Л.Г. – ДАН СССР, 1991г., т.321, №4, с.
3. Михайлов Л.Г. – ДАН АН России, 1992г. т.322, №4, с.
4. Михайлов Л.Г. – ДАН АН России, 1994г. т.336, №1, с.
5. Михайлов Л.Г. – ДАН АН России, 1997г. т.354, №7, с.
6. Михайлов Л.Г. – ДАН АН России, 2000г. т.371, №4, с.
7. Михайлов Л.Г. – ДАН АН России, 2001г. т.378, №3, с.
8. Михайлов Л.Г. – ДАН АН России, 2002г. т.384, №6,с.
9. Михайлов Л.Г. – ДАН АН России, 2004г. т.398, №2,с

УДК 532.546

К определению параметров нелинейной зависимости фильтрации в глинистых грунтах

И.Б. Муратов
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

В практике фильтрационных расчетов широко распространены линейные зависимости $u = kI$ и $u = k_1(I - I_1)$, $(I > 1)$ между скоростью фильтрации u и градиентом гидравлического напора I, характеризующие соответственно течение жидкости в легких (песчаных) и плотных глинистых грунтах в области достаточно больших I. Здесь k – коэффициент фильтрации, I_1– условный начальный градиент напора.

Как правило в покровной толще почвогрунтов задействованных территорий преобладают неустановившиеся фильтрационные процессы, с развитой при малых градиентах напора $(I < 1$ и $I_1 \to 0)$ нелиненой зависимостью $u(I)$. В этом случае нами на основе некоторых теоретических и эмпирических обобщений в качестве модели фильтрации в глинистых грунтах предложена закономерность:

$$u(I) = \begin{cases} k_\alpha I^\alpha, & 0 \le I \le I_\alpha \\ k_1(I - I_1), & I_\alpha \le I \le I_{\text{нб}}. \end{cases}$$

В настоящее время нами создан и предложен к практическому применению новый графоаналитический способ определения параметров k_1 и I_1 линейной и $I_\alpha, \alpha, k_\alpha$ нелинейной частей этой модели - по экспериментальным данным процесса восстановления высоты пьезометрического напора $h = h(t)$ на одном из концов природного образца грунта: в режиме падающих градиентов напора $I_{\text{нб}} \to I_\alpha \to I_1 \to 0$ при $0 \le h \le H_0$.

Подобным образом были испытаны более 100 монолитных образцов почвогрунтов покровной толщи Яванской долины. Ниже приведены их фильтрационные характеристики, определенные графоаналитическим способом - в обобщении по основным типам изученных грунтов.

	$k_1^*, 10^{-7}$м/с	I_1	I_α	$k_\alpha, 10^{-7}$м/с	α
тяжелый суглинок	$0,782$	$0,063$	$0,155$	$1,82$	$1,7$
средний суглинок	$1,57$	$0,055$	$0,141$	$3,15$	$1,6$
легкий суглинок	$6,10$	$0,211$	$0,641$	$5,23$	$1,5.$

*значения k, приуроченные к 10^oC.

Эти результаты при $I \le 0,2 \div 0,6$ уточняют линейную зависимость Дарси $u = kI$ от 25 до 80% и более.

УДК 517.945

Система первого порядка вырождающаяся вдоль оси

Д.Муртазоев
(Таджикский государственный национальный университет, г.Душанбе)

Система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha z^l \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \bar{z}^l \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$z = x + iy$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ в случае $\alpha = -\beta = 2$ и $l = 0$ является эллиптической и известно под названием системой Моисила-Теодореско (см. [1],[2],[3]). Когда $\alpha\beta < 0$ и l целое положительное число эллиптичесность системы (1) нарушается вдоль оси Ot. В цилиндрической области $\Omega_t = \{(t, z) : t > 0, |z| < 1\}$ для системы (1) исследуется следующая задача

Задача. *Найти в области Ω_t ограниченное решение системы (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(0, z) = 0, \tag{2}$$

$$v(0, \zeta) = \varphi(\zeta), |\zeta| = 1, \tag{3}$$

где $\varphi(\zeta)$ непрерывна при $|\zeta| = 1$.

Применяя метод разделения переменных, положим $u = T_1(t)w_1(z)$, $v = T_2(t)w_2(t)$. Тогда относительно $T_k(t)$ и $w_k(t)$ получим следующие уравнения

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \lambda_1 T_2 = 0, \ \frac{\partial T_2}{\partial t} - \lambda_2 T_2 = 0, \tag{4}$$

$$\alpha z^l \frac{\partial w_2}{\partial z} + \lambda_1 w_1 = 0, \quad \alpha \bar{z}^l \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} + \lambda_2 w_2 = 0, \tag{5}$$

где λ_1, λ_2 – параметры разделение.

Из (4) и (5) следует, что

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial t^2} - \lambda_1 \lambda_2 T_k = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial \bar{z} \partial z} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\alpha\beta} \frac{1}{|z|^{2l}} w_k = 0. \tag{7}$$

Из условия (2) следует, что

$$T_1(0) = 0, \tag{8}$$

и для того,чтобы нетривиальное решение уравнением (6) было ограниченным при $t \to \infty$ с необходимостью вытекает выполнение условия

$$Im(\lambda_1\lambda_2) = 0, \quad \lambda_1\lambda_2 = -\lambda^2.$$

Решение уравнения (6), удовлетворяющее уравнений (4) и условию (8) представляются в виде

$$T_1 = B\sin\lambda t, \tag{9}$$

$$T_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cos\lambda t, \tag{10}$$

где B произвольное постоянное.

В уравнении (7) переходим в полярные координаты $z = re^{i\theta}$, $r = |z|$ и представляя решение в виде $W_k = R_k(r)\Phi_k(\theta)$, разделяем переменные. В результате чего получим уравнения

$$r^2R_k'' + rR_k' - \Big(\frac{\nu^2}{r^{2l-2}} + \mu\Big)R_k = 0, \tag{11}$$

$$\Phi_k'' + \mu\Phi_k = 0, \mu = n^2, \nu^2 = -\frac{4\lambda^2}{\alpha\beta}. \tag{12}$$

1. В случае $l = 0$ уравнение (11) представляет собой уравнение бесселовой функции мнимого аргумента

$$r^2R_k'' + rR_k' - (r^2\nu^2 + n^2)R_k = 0 \tag{12}$$

и решение поставленной задачи получаем в виде

$$u(t,z) = \Big[b_1\frac{I_1(\nu|z|)}{I_1(\nu)} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(b_{n+1}\frac{z^n}{|z|^n} + b_{-n+1}\frac{\bar{z}^n}{|z|^n}\big)\frac{I_n(\nu|z|)}{I_n(\nu)}\Big]\sin\lambda t, \tag{14}$$

$$v(t,z) = \Big[a_0\frac{I_0(\nu|z|)}{I_0(\nu)} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\frac{z^n}{|z|^n} + a_{-n}\frac{\bar{z}^n}{|z|^n}\big)\frac{I_n(\nu|z|)}{I_n(\nu)}\Big]\cos\nu t, \tag{15}$$

где $I_n(\cdot)$ – функция Бесселя мнимого аргумента порядка n,

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\zeta)e^{-i\theta(n-1)}d\theta,\ b_n = \frac{\sqrt{-\alpha\beta}}{\beta}a_n.$$

2. Когда $l=1$ уравнение (11) имеет вид

$$r^2R''+rR'-(\nu^2+n^2)=0, \qquad (16)$$

ограниченное при $z=0$ решение которого представляется в виде

$$R^{(n)}=|z|^{p_n},\ p_n=\sqrt{\nu^2+n^2}.$$

Устанавливается, что в этом случае решение поставленной задачи получится в виде

$$u(t,z)=\Big[a_0|z|^\nu+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{a_n}{p_n-n}z^n+\frac{a_{n-1}}{p_n}\bar{z}^n\Big)|z|^{p_n-n}\Big]\sin\lambda t, \qquad (17)$$

$$v(t,z)=\Big[a_0|z|^\nu+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_nz^n+a_{-n}\bar{z}^n\Big)|z|^{p_n-n}\Big]\cos\lambda t. \qquad (18)$$

3. Когда $l\geq 2$ уравнение (11) имеет вид

$$r^{2l}R''+r^{2l-1}R'-(\nu^2+n^2r^{2(l-1)})R=0, \qquad (19)$$

которые является модифицированным уравнением Бесселя. В этом случае решение поставленной задачи будет имеет вид

$$u(t,z)=\Big[a_{1-l}\frac{K_0(\zeta}{K_1(\zeta_0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(b_{n-l+1}\frac{K_m(\zeta)}{K_{m+1}(\zeta_0)}z^n+b_{-n-l+1}\frac{K_{-m}(\zeta)}{K_{-m+1}(\zeta_0}\bar{z}^n\Big)\frac{\sin\lambda t}{|z|^n}, \qquad (20)$$

$$v(t,z)=\Big[a_0\frac{K_0(\zeta)}{K_1(\zeta_0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\frac{K_m(\zeta)}{K_m(\zeta_0)}z^n+a_{-n}\frac{K_{-m}(\zeta)}{K_{-m+1}(\zeta_0)}\bar{z}^n\Big)\frac{1}{|z|^n}\Big]\cos\lambda t, \qquad (21)$$

где $K_m(\zeta)-$ функция Макдональда ([4]) $m=\dfrac{n}{1-l}$–го порядка аргумента $\zeta=\nu(1-l)^{-1}|z|^{1-l},\ \zeta_0=\nu(1-l)^{-1}$.

Таким образом, относительно разрешимости поставленной задачи имеет место теорема.

Теорема. *Пусть в условии (3) задачи функция $\varphi(\zeta),|\zeta|=1$, непрерывно дифференцируема. Тогда задача (1)-(3) имеет единственное решение зависящего от одного произвольного положительного постоянного λ и представляется формулами (14)-(15), (17)-(18) и (20)-21).*

Литература

1. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. -М. Наука. 1966.

2. Джураев А. Метод сингулярных интегральных уравнений. М. Наука. 1987.

3. Муртазоев Д. ДАН Тадж. ССР, 1983, т. XXVI, №8.

4.Уиттекер Т., Ватсон Дж. Курс современного анализа. ч. II. М. 1963.

УДК 517.927

Метод редукции для задачи на графе

Мустафокулов Р.
(Таджикский государственный национальный университет, г.Душанбе)

В настоящем докладе излагается метод, позволяющий свести изучение задачи на графе с правой частью сосредоточенной лишь на части графа (например, на одном ребре) к задаче на более узком графе, или даже вообще на отрезке.

Пусть Γ – геометрический граф в R^3, $J(\Gamma)$ – множество внутренних, а $D\Gamma$ – множество граничных вершин Γ. Пусть ребра и вершины пронумерованы каким - либо образом, тогда ребра будем обозначать γ_i $(i = \overline{1,k})$; множество номеров ребер, содержащих вершину a, обозначим через $I(a)$. Обозначим также $[\Gamma] = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \gamma_i$.

Под дифференциальным уравнением на графе Γ понимается(см.[1]) совокупность дифференциальных уравнений на ребрах

$$(p(x)y'')'' - (q(x)y')' = f(x) \quad (x \in [\Gamma]) \tag{1}$$

и совокупность условий согласования во внутренних вершинах графа

$$\begin{cases} y_i''(a) = 0 \qquad (i \in I(a)), \\ \sum\limits_{i \in I(a)} [(p_i y_i'')' - q_i y_i'](a) + \alpha(a) y(a) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Краевая задача на графе – это система (1)-(2) вместе с краевыми условиями

$$\begin{cases} \alpha(b)[(py'')' - qy'](b) - y(b) = 0, \\ \beta(b) y''(b) - \delta(b) y'(b) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

заданных в граничных вершинах $b \in D\Gamma$.

Пусть $f(x) \equiv 0$ вне некоторого ребра $\gamma = [a_1, a_2]$. Множество $\Gamma \setminus \gamma$ распадает на набор компонент связности Γ_j, для которых верщины a_1 и a_2 уже являются граничными. Под сужением задачи (1)–(3) на Γ_j будем понимать уравнение на Γ_j, включающее:

а) однородные уравнения на тех ребрах Γ, которые принадлежат Γ_j;

б) все условия согласования во внутренних вершинах Γ, оставщихся внутренними и в Γ_j (т.е. во всех, кроме a_1 и a_2);

в) краевые условия в граничных верщинах Γ, оставщихся граничными и в Γ_j;

г) условие $y''(a_1) = 0$, $y''(a_2) = 0$ во вновь образовавщихся граничных вершинах a_1 и a_2 для Γ_j.

Такая задача является полноценной задачей на Γ_j (такая же, как исходная задача) и к ней применим принцип максимума(см.[1]). Поэтому если рассматривать лишь решения, удовлетворяющие условию

$$y\Big|_{D\Gamma\bigcap\Gamma_j} = 0 \tag{4}$$

(т.е. обращающиеся в нуль на всей границе, кроме точек a_1 и a_2), то множество таких решений является одномерным, если Γ_j примыкает только к одной из вершин a_1 или a_2 и двумерным, если Γ_j примыкает к обоим вершинам a_1 и a_2, при этом, в первом случае

$$y(x) = y(a_k)z^k(x) \tag{5}$$

и, во втором случае

$$y(x) = y(a_1)z^1(x) + y(a_2)z^2(x), \tag{6}$$

где $z^k(x)$, $(k = 1, 2)$ – решения уравнения на Γ_j, удовлетворяющее условию (4) и

$$z^k(a_i) = \delta_{ik}, \quad (i, k = 1, 2).$$

Таким образом, мы приходим к следующему результату:

Теорема 1. *Пусть* $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0 \quad (q(x) \not\equiv 0)$, *коэффициенты* $\alpha(.), \beta(.), \delta(.)$ *неотрицательны, причем* $\beta(b) + \delta(b) > 0 \quad (b \in D\Gamma)$. *Пусть* $f(x) \equiv 0$ *вне ребра* $\gamma = [a_1, a_2]$.

Тогда задача (1)-(3) эквивалентна задаче

$$\begin{cases} (p(x)y'')'' - (q(x)y')' = f(x), \\ y''(a_1) = y''(a_2) = 0, \\ [(py'')' - qy'](a_1) + \alpha(a_1)y(a_1) - \alpha(a_1)y(a_2) = 0, \\ [(py'')' - qy'](a_2) - \alpha(a_2)y(a_2) + \alpha(a_2)y(a_1) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

на ребре $\gamma = [a_1, a_2]$.

Эта теорема позволяет свести задачу (1)–(3) на графе Γ к задаче на отрезке γ. Такое сведение очень удобно при решении многих задач, например, при анализе функции Грина, для которой правая часть уравнения сосредоточена в одной точке.

Введем на множестве $\Gamma \setminus \gamma$ функции Z^1 и Z^2, сужение которых на каждом подграфе Γ_j, примыкающий к вершинам a_1 и a_2 , совпадают соответственно с функциями z^1 и z^2, определенными в равенствах (5) и (6). Тогда справедливо утверждение

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теорема 1 и $G(x,s)$– функция Грина задачи (1)–(3).*

Тогда для $x,s \in \gamma$ функция $G(x,s)$ совпадает с функцией Грина $G_\gamma(x,s)$ задачи (7), а для $x,s \in \Gamma \setminus \gamma$ выполнено равество

$$G(x,s) = Z^1(x)G_\gamma(a_1,s) + Z^2(x)G_\gamma(a_2,s);$$

при этом функции $Z^k(x)(k=1,2)$ неотрицательны и одновременно обе не обращаются в нуль при $x \notin D\Gamma$.

Литература

1. Покорный Ю.В. и др. // Дифференциальные уравнения на геометрических графах.// М.Физмат. 2004, 268с

УДК 588.7+16.31.21+811.222.8

Концептуальное моделирование процесса морфологического анализа таджикских словоформ, образованных аффиксальным способом словообразования

Назаров Р.С.
(Технологический университет Таджикистана, г.Душанбе)

В настоящее время одной из актуальных перспективных и быстро развывающихся областей информационно-коммуникационных технологий является обработка текстов и речи на естественном языке. При этом возникает потребность в решении таких задач, связанных с морфологическими преобразованиями слов естественного языка, как морфологический анализ и синтез словоформ, обнаружение и исправление ошибок в текстах, нормализация слов, автоматизированное определение словарных характеристик новых слов и т.п. В большинство случаев решение задач данного класса сводится к решению задач морфологического анализа и синтеза.

Настоящий доклад посвящен основной проблеме на пути к реализации системы компьютерного морфологического анализа словоформ таджикского языка.

Морфологический анализ выполняет распознающую роль на входе системы. Функцией морфологического анализа является выделение основы слова и определение морфологической информации приписываемой этой основе по таблицам аффиксов и словарю [1]. Иначе говоря, морфологический анализ – это процесс выявления морфологических характеристик словоформ, который применяется с целью членения слов на отдельные морфемы или сочетания морфем.

Словообразование – это процесс образования слов, называемых производными и сложными, обычно на базе однокорневых слов по существующим в языке образцам и моделям с помощью аффиксации, словосложения, конверсии и других формальных средств [2].

Аффиксальный способ словообразования – важнейший источник пополнения словарного состава языка, один из главных путей образования терминов. Аффиксация является одним из наиболее важных путей образования именных частей речи и продуктивным способом образования слов в персидском и таджикском языках. Около 85% всего аффиксального фонда современных персидского и таджикского языков составляют аффиксы, образующие именные части речи [3]. Возможны три вида аффиксации: приставочный (префиксальный), суффиксальный и приставочно (префиксально)-суффиксальный. Разновидностью суффиксального является способ постфиксальный.

В Таджикистане, исследования в области автоматизированного морфологического анализа и синтеза слов таджикского языка начаты в статьях Усманова З.Д. и Исмаилова М.А. [4 – 6]. В частности, в работе [4] предложены модели морфологического анализа словоформ таджикского языка, образованных из основ полнозначных частей речи.

Словообразование в таджикском языке происходит двумя способами [7]: первый – путем словосложения, когда из двух или более слов образуется новое слово, и второй – путем аффиксации (словопроизводство), когда из данного слова присоединением аффиксов (префиксов, инфиксов и постфиксов) получают новое слово.

Известно, что всякое таджикское слово в общем случае расчленяется на отдельные составляющие – морфемы (***морфема***, от греческого morphe – форма, - это минимальная, не делимая, значимая часть слова [2]). По выполняемым функциям морфемы делятся на служебные (аффиксальные) и неслужебные (корневые). Такая специфика таджикского языка позволяет записывать любое однокорневое таджикское слово (W) в виде:

$$W = pr \oplus R \oplus ps, \tag{1}$$

где pr – в общем случае, составной префикс (***префикс***, от лат. prae –

впереди и fixus – прикрепленный, - это значимая часть слова, которая находится перед корнем и служит для образования новых слов [2]); R – корень слова (***корень*** – носитель вещественного лексического значения слова, центральная его часть, оставщаяся неизменной после устранения всех словообразовательных и/или словоизменительных элементов [2]); ps – в общем случае, составной постфикс (***постфикс***, от лат. post – после и fixus – прикрепленный, - это словообразовательный или словоизменительный аффикс, который находится в конце слова – после корня [2]); $\oplus$– символ конкатенации (агглютинации или же присоединение без пробела).

Осуществить морфологический анализ словоформы значит расчленить ее на три ее составляющие части (pr–префикс, R – корень и ps – постфикс), т.е. на вход системы компьютерного морфологического анализа подается буквенная цепочка (словоформа), являющаяся формой некоторой словарной статьи (лексемы), и системе компьютерного морфологического анализа необходимо расчленить эту буквенную цепочку на ее составляющие морфемы (префиксы, основу и постфиксы), как это показано в (1). Например, если на вход алгоритма подано слово ***бемулоҳизагӣ***, то результат должен быть следующим:

$$\textbf{\textit{бе}} \oplus \textbf{\textit{мулоҳиза}} \oplus \textbf{\textit{гӣ}},$$

где ***бе*** – префикс (придающей основе признак отсутствие качества), ***мулоҳиза*** – корень слова (имя существительное) и ***гӣ*** – словообразовательный суффикс.

Следует отметить, что при разработке системы компьютерного морфологического анализа мы принимаем следующие основополагающие гипотезы:

Гипотеза 1. *Таджикское слово, вводимое в компьютер для морфологического анализа, правильное.*

Гипотеза 2. *Корень вводимой в компьютер для морфологического анализа таджикской словоформы содержится в компьютерном словаре – базе основ* $\{R\}$.

В работе [8] предложен алгоритм морфологического анализа словоформ таджикского языка, предполагающий наличие четырех баз (базу префиксов $\{pr\}$, базу основ $\{R\}$, базу постфиксов $\{ps\}$ и базу грамматической информации основы слова *{ЧР-СП}*) для реализации алгоритма. В ней изложена структура каждой из вышеназванных баз данных, а также в виде псевдокода описана последовательность действий морфологического анализа словоформ таджикского языка.

Более подробная информация о составе и структуре базы префиксов $\{pr\}$ таджикского языка приведена в работе [9].

Описанная модель процесса морфологического анализа таджикских словоформ, алгоритм которого приведен в работе [8], разработана в виде компьютерного приложения в среде программирования Microsoft Visual Basic 6.0.

Литература

1. Шемякин Ю.И. Начала компьютерной лингвистики. – М.: Изд-во МГОУ АО "Росвузнаука", 1992. – 81 с.
2. Лингвистический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1990. – 685 с.
3. Амонова Ф.Р. Именное аффиксальное словообразование в современном персидском и таджикском языках. – Душанбе, 1982. – 55 с.
4. Исмаилов М.А. Основы автоматизированного морфологического анализа слов таджикского языка. – Душанбе: ПИО НПИЦентр, 1994. – 156 с.
5. Исмаилов М.А. – ДАН РТ, 1998, т. 41, №9, с. 63-68.
6. Усманов З.Д., Исмаилов М.А. – ДАН Тадж. ССР, 1990, т. 33, №11.
7. Арзуманов С., Сангинов А. Таджикский язык. – Душанбе: Маориф, 1988. – 416 с.
8. Назаров Р.С. – ДАН РТ, 2005, т. 48, №3-4, с. 94-98.
9. Назаров Р.С. – ДАН РТ, 2006, т. 49, №3, с. 221-224.

УДК 519.87:627.8

Системный подход к проблеме управления и использования водных ресурсов трансграничных речных бассейнов

Наврузов С.Т.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

В работе рассматривается общая задача управления и использования водных ресурсов бассейна трансграничной реки, которая характеризуется проблемой вододеления между суверенными государствами. Проблема усложняется тем, что каждое суверенное государство питается использовать водные ресурсы бассейна трансграничной реки исходя из своих собственных интересов национальной экономики. Однако, неравномерность, ограниченность водных ресурсов и высокий темп потребности в воде в бассейне трансграничной реки, делают рассматриваемую проблематику весьма актуальной.

В работе предлагается системный подход, когда речной бассейн рассматривается в качестве основной зоны планирования и все исследования проводится в рамках этой зоны планирования. Система бассейна реки состоит из трех компонентов:

$$WB = \{S, D, P\} \tag{1}$$

где S–компоненты источников, такие как колена реки, каналы, водохранилища и водоносные слои; D–компоненты спроса, такие как орошаемые поля, промышленные предприятия и города; P–промежуточные компоненты, такие как обогащающие заводы, предприятия по повторному использованию и переработке воды.

В рамках речного бассейна можно рассмотреть различные уровни детализации использования воды. В настоящей работе, рассматривается бассейн реки, в котором преобладает использование воды в сельскохозяйственных и энергетических целях.

Итак, речной бассейн характеризуется в основном двумя компонентами: *источником и спросом.* Источники речного бассейна описываются, как

$$\mathrm{S} = \{N, Cl, R\} \tag{2}$$

где N–совокупность колена рек (участок между водохранилищами, боковых притоков); Cl – совокупность каналов (по которым вода забирается из речного бассейна, или же обратно сбрасываются в речной бассейн, после повторного использования); R–совокупность водохранилищ расположенных в речном бассейне (схема расположение –произвольное). Спросы к речному бассейну описываются, как

$$D = \{Q, W\}, \tag{3}$$

где Q–совокупность требований орошаемого земледелья (в целом для речного бассейна), W–совокупность требований на производства гидроэлектроэнергии.

Задача регулирования речного бассейна, заключается в удовлетворение данных спросов, с максимальной степенью обеспеченности. Регулирование речного бассейна осуществляется посредством (в основном) водохранилищ. С этой точки зрения, рассматривается регулирование речного бассейна

$$\overline{WB} = \{S, D, Tr\}, \tag{4}$$

где S и D–описываются согласно (2) и (3), Tr–компонент трансграничности речного бассейна, $\overline{WB}$–трансграничный речной бассейн. Понятие трансграничности в природе как таковой не существует, оно лишь ограничение наложенное самыми людьми (или же собственная философия самых людей). Природа между тем оперирует конкретными объектами. Что касается водных ресурсов речных бассейнов, то реальная картина здесь, это наличие водных ресурсов самой реки и ее использование по всему руслу течения реки, а также зависимость внутригодового распределения воды от водности года (многоводный, маловодный). Компонента Tr - территориальная сеть накладываемая к бассейну реки, в соответствие с территориальной границей государств расположенных вдоль речного бассейна , а именно:

$$Tr = \{A, B, ...\}, \tag{5}$$

где A, B–территория государств A и B расположенной в рамках речного бассейна $\overline{WB}$. По отношению к Tr определяется $\overline{WB}$, а именно:

$$\overline{WB} = \begin{cases} Tr & \text{если } , \{S, D, \; A \in \{S, D\} \vee \{A \in S, B \in D\} \\ Tr & \text{если } , \{S, D, \; B \in \{S, D\} \vee \{B \in S, A \in D\}. \end{cases} \tag{6}$$

В зависимости от спроса к речному бассейну, можно определить различные взаимоотношениея между государствами расположенными в этом бассейне. Если требованиея на орошаемое земледелье Q в обоих государств бассейна одинаково приоритетно, то задача регулирования трансграничного бассейна $\overline{WB}$ сводиться к нахождению максимального удовлетворения потребности Q в определенный период времени t. Когда требование государств A приоритетно на производство гидроэлектроэнергии W, а требование государство B приоритетно на орошение Q, то возникает противоречие–конфликт интересов. В этом случае, возникает потребность в решение данного конфликта, путем нахождения компромиссного решения относительно удовлетворения требований этих государств.

В обоих случаях, требуется управление водными ресурсами речного бассейна $\overline{WB}$, описываемой (1)-(6), посредством управления водохранилищ R, которые в свою очередь также могут быть территориально расположены как на территорий страны A, так и на территорий страны B.

В работе описываются основные компоненты и структуры модели-прототипа, способной обеспечить возможность определения рациональных и эффективных стратегий управления водными ресурсами в масштабе бассейна реки. Модель был апробирован для бассейнов рек Сырдарья и Амударья в Центральной Азии. Результаты модели показывают, что важнейшим является стратегия принятия компромиссных решений при управлении трансграничными водными ресурсами с учетом интересов суверенных государств.

УДК 519.94

Бифуркация в системах с медленно меняющиеся параметрами

Нуров И.Д.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

В теории нелинейных колебаний одним из наиболее интересных, являются задачи о локальных бифуркациях в окрестностях стационарных состояний системы при изменении характера их устойчивости. При этом могут возникать новые состояния равновесия, периодические или почти периодические колебания малой амплитуды, инвариантные торы и др. (см., например, [1] и имеющуюся там библиографию).

В процессе функционирования системы ее параметры, обычно медленно эволюционируют по какому-либо закону. При этом, естественно эффекты бифуркации могут меняться. Задаче исследования бифуркации с медленно меняющимися параметрами посвящены исследования многих авторов .

В работе изучается дифференциальное уравнение

$$x' = A(\lambda)x + a(x,\lambda), \quad x \in R^N, \tag{1}$$

где $A(\lambda)$ – квадратная матрица порядка N, непрерывно зависящая от скалярного параметра λ, вектор-функция $a(x,\lambda)$ непрерывна по совокупности переменных и равномерно по λ удовлетворяет условию $\|a(x,\lambda)\| = o(\|x\|)$, при $\|x\| \to 0$. Здесь $\|\ \|$ означает какую-либо норму в пространстве R^N.

Уравнение (1) при всех λ имеет нулевое решение. Если при некотором $\lambda = \lambda_0$ матрица $A(\lambda_0)$ не имеет собственных значений с нулевой вещественной частью, то при всех λ близких к λ_0 решение $x = 0$ является гиперболической особой точкой уравнения (1), при этом топология фазового портрета уравнения (1) в окрестности точки $x = 0$ одинакова для всех таких λ. Если же матрица $A(\lambda_0)$ имеет собственное значение с нулевой вещественной частью, то при переходе через λ_0 фазовый портрет уравнения (1) может качественно измениться. Такие значения параметра называют бифуркационными или точками бифуркации.

Рассматривается бифуркация двукратного равновесия уравнения (1), которая является одной из двух типичных локальных бифуркаций [1] в окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (1), возникающих при переходе спектра матрицы $A(\lambda)$ через мнимую ось, а именно, в ситуации, когда одно из собственных значений матрицы

$A(\lambda_0)$ равно нулю. Второй типичной бифуркацией является бифуркация Андронова-Хопфа , когда матрица $A(\lambda_0)$ имеет пару чисто мнимых собственных значений.

Число λ_0 называют [1] точкой бифуркации двукратного равновесия уравнения (1), если существуют последовательности $\lambda_n \to \lambda_0$ и $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, такие, что $A(\lambda_n)x_n + a(x_n, \lambda_n) = 0$. При этом векторы x_n и соответствующие значения λ_n параметра λ называют бифурцирующими решениями уравнения (1).

Наряду с исследованием бифуркации двукратного равновесия уравнения (1), изучается также ситуация, когда параметр λ медленно эволюционирует по периодическому закону в окрестности точки бифуркации λ_0:

$$\lambda = f_\delta(t) = \lambda_0 + \delta\varphi(t), \quad \varphi(t+T) \equiv \varphi(t), \tag{2}$$

где δ – малый параметр. В этом случае уравнение (1) принимает вид:

$$x' = A[f_\delta(t)]x + a[x, f_\delta(t)], \tag{3}$$

Число δ_0 называют [2] точкой бифуркации вынужденных колебаний уравнения (3), если существует последовательность $\delta_n \to \delta_0$ такая, что при $\delta = \delta_n$ уравнения (3) имеет ненулевое T-периодическое решение $x_n(t)$, при этом $\|x_n(t)\|_C \to 0$. Здесь $\|x(t)\|_C$ означает норму функции $x(t)$ в равномерной метрике.

Как правило [3-5], при бифуркации двукратного равновесия уравнения (1) возникают одна или несколько непрерывных ветвей бифурцирующих решений $x(\lambda)$, определенных либо в некоторой окрестности $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ (двусторонняя бифуркация), либо в односторонней окрестности: $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0]$ (субкритическая бифуркация) или $[\lambda_0, \lambda_0 + \delta)$ (суперкритическая бифуркация). Аналогично определяется тип бифуркации вынужденных колебаний уравнения (3).

Получены новые формулы, определяющие тип бифуркации двукратного равновесия уравнения (1) и свойства устойчивости бифурцирующих решений. Показано также, что при достаточно общих предположениях бифуркация двухкратного равновесия уравнения (1) в случае, когда параметр λ медленно эволюционирует по периодическому закону (2), преобразуется в бифуркацию вынужденных колебаний уравнения (3). При этом в естественном смысле тип бифуркации и свойства устойчивости бифурцирующих решений сохраняются.

Литература

1. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – Москва-Ижевск: Институт

компьютерных исследований, 2002. 560 с.
2. Holden L.J., Erneux T. // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1993. V. 53. є 4. P. 1045-1058.
3.Maree G.J.M. // Nonlinear Dynamics. 1997. V. 12. P. 1-37.
4. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1980. 362 с.
5. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, – М.: Наука, 1966. 332 с.
6. Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К. Геометрические методы в вариационных задачах. – М.: Магистр, 1998. 660 с.
7. Красносельский М.А., Юмагулов М.Г. // ДАН России, 1999. Т.365. є 2. С. 162-164.

УДК 511.

Сравнение $x^n + y^n \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ в чисто кубическом поле

Панов В.М.
(Институт математики АН РТ г.Душанбе)

Пусть в чисто кубическом поле $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$ (m не содержит куба) задан идеал первой степени $\mathfrak{p}$ и натуральное число $n|N\mathfrak{p}-1$. Определим число

$$\delta_n(-1) = \begin{cases} 1, & \text{если разрешимо сравнение } z^n \equiv -1 \pmod{\mathfrak{p}}, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и пусть $\sharp(x^n + y^n \equiv 1)$ число решений ($x \bmod \mathfrak{p}$, $y \bmod \mathfrak{p}$) указанного сравнения. Тогда верна следующая

Теорема. Имеет место оценка $|\, \sharp(x^n+y^n \equiv 1)+n\delta_n(-1)-(N\mathfrak{p}+1)| \leq (n-1)(n-2)\sqrt{N\mathfrak{p}}$.

Доказательство. Будем иметь

$$\sharp(x^n + y^n \equiv 1) = \sum_{\substack{\alpha,\beta \bmod \mathfrak{p} \\ \alpha+\beta\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}}} \sharp(x^n \equiv \alpha)\ \sharp(y^n \equiv \beta) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\substack{\alpha,\beta \bmod \mathfrak{p} \\ \alpha+\beta\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}}} \chi_{\mathfrak{p}}^j(\alpha)\chi_{\mathfrak{p}}^i(\beta),$$

где $\chi_{\mathfrak{p}}$ некоторый мультипликативный характер порядка n. Отсюда

$$\sharp(x^n + y^n \equiv 1) = N\mathfrak{p} + 1 - n\delta_n(-1) + \sum_{\substack{1 \le i \le j \le n-1 \\ i+j \ne n}} \sum_{\substack{\alpha,\beta \bmod \mathfrak{p} \\ \alpha+\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}}} \chi_{\mathfrak{p}}^j(\alpha)\chi_{\mathfrak{p}}^i(\beta),$$

где в последней сумме количество слагаемых равно $(n-1)^2 - (n-1) = (n-1)(n-2)$ и все эти слагаемые по абсолютной величине равны $\sqrt{N\mathfrak{p}}$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Пример. Чисто кубическое поле $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{10})$ имеет для максимального порядка $\mathbb{Z}_K$ целый базис $[\frac{1+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{100}}{3},\ \sqrt[3]{10},\ \sqrt[3]{100}]$ и дискриминант $d_K = -300$. Пусть идеал $\mathfrak{p}$ делит $3\mathbb{Z}_K = \mathfrak{p}\mathfrak{q}^2 = (3,\ \frac{1+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{100}}{3} + 2)(3,\ \frac{1+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{100}}{3} + 3)^2$. Для этого идеала существуют только два характера – тривиальный и квадратичный. Для количеств решений имеем следующие точные равенства

$$\sharp(x + y \equiv 1) = 3, \text{ поскольку } \delta_1(-1) = 1,$$

$$\sharp(x^2 + y^2 \equiv 1) = 4, \text{ поскольку } \delta_2(-1) = 0.$$

Литература

1. Лидл Р., Нидеррайтер Г., *Конечные поля. Т.1.*–М.: Мир, 1988.
2. Belabas K., *A fast algorithm to compute cubic fields,* Math. Comp., 66(1997)1213–1237.

УДК 5176.956

О некоторых переопределенных системах уравнений с частными производными

Пиров Р.
(ТГПУ им. К. Ш. Джураева, г. Душанбе)

1.Системы четырех дифференциальных уравнений (д. у) с тремя неизвестными функциями. После ряда публикаций по исследованию квазинейных и нелинейных систем трех и четырех д. у. первого порядка с двумя неизвестными ([1]) естественно поставить вопрос об изучении систем с тремя неизвестными функциями.

Если начинать с квазилинейных систем, то следует отметить, что общее их число составляет 126 типов и по мере того как подаются решению можно разбить их на четыре группы [2].

Что касается нелинейных систем, а именно систем содержащие в правой части одну производную, то они всегда приводятся к укороченным п. д. (укр. п. д.) системам, а в других к п. д.- системам относительно шести неизвестным функциям. Также выяснены многообразии содержащее не только четырех произвольных постоянных, но и произвольную функцию $\Psi(\mathrm{z})$.

Для нелинейных систем, содержащие в правой части два и три производных доказаных теоремы утверждающие существования многообразий содержащие шесть и восемь произвольных постоянных [3].

2. Нелинейные комплексные системы д.у. с двумя комплексными неизвестными функциями.

Пусть даны системы

$$\begin{gathered} W_z^1, W_{\bar z}^1, W_z^2 = f^j(z,\bar z, W^1, \bar W^1, W^2, \bar W^2, W_{z^-}^2),\ j=1,2,3; \\ f^j, W^1 \in C^2, \quad W^2 \in C^3, \quad f_{w^3}^2 \cdot f_{w^3}^3 - f_{w^3}^1 \neq 0. \end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{cases} W_z^1, W_{\bar z}^1 = f^j(z,\bar z,\zeta,\bar\zeta, W^1,\bar W^1, W^2, \bar W^2), \quad j=1,2 \\ W^1, W_z^2 = f^k(z,z,\zeta,\bar\zeta, W^1, \bar W^1, W^2, \bar W^2, W_{\bar\zeta}^1), \quad k=3,4 \end{cases} \tag{2}$$

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть дано система (1), где* f^j*,* $j=1,2,3$*;* $W^1\in C^2$*,* $W^2 \in C^3$*,* $f_{w^3}^2 f_{w^3}^3 - f_{w^3}^1 \neq 0$ *и в некоторой окрестности точки* $(z_{0,}\bar z_0 : W_0^1, \bar W_0^1, W_0^2, \bar W_0^2, (W_{\bar z}^2)_0)$ *тождественно выполняется равенство* $D_{\bar z} f^4 = D_z f^5$*, где* f^4 *и* f^5 *даются явными соотношениями относительно правых частей (1) и их частными производными, то задача (1) и* $W_0^1 = C_2$*,* $W_0^2 = C_2$*,* $(W_{\bar z}^2)_0 = C_3$ *разрешимо единственным образом*

Теорема 2. *Пусть дана система (2), где* f^j*,* $j=1,2,3,4$*;* $W^1 \in C^2$*,* $W^2 \in C^3$ *и в некоторой окрестности точки* $(z_0, \bar z_0, \zeta_0, \bar\zeta_0, W_0^1, \bar W_0^1, W_0^2, \bar W_0^2, W_0^3, \bar W_0^3)$*,* $(W^3 = W_{\bar\zeta}^1)$ *выполняются* $\Delta = 0$*,* $|f_{w^3}^7 - f_{w^3}^3 \cdot f_{w^3}^{10}| \neq |f_{\bar w^3}^7 f_{\bar w^3}^3 - f_{\bar w^3}^{10}|$ *и четыре явные условия (неприводятся из-за громоздкости), то задача (2) и* $W_0^1 = C_1$*,* $W_0^2 = C_2$*,* $(W_{\bar z}^2)_0 = C_3$ *разрешима единственным образом.*

Замечание 1. *При выполнении условий теоремы 1 и 2 многообразия решений системы (1) и (2) содержат три произвольных комплексных постоянных.*

Замечание 2. *Подробное изложение этих и других частных случаев можно найти в [4].*

3. Нелинейные системы 2-го порядка. Считая теорию нелинейных систем с одной и двумя неизвестными функциями на плоскости, нами раньше изученной, рассмотрим систему

$$U_{xx}, U_{xy}, V_{yy}, V_{xy} = f^i(x,y,z,U,V,V_x,V_y,V_x,V_y,U_{yy},V_{xx}),\ i=1,2,3,4, \tag{3}$$

где $U, V \in C^4, f^i \in C^2, i = 1,2,3,4$. Найденоы явные условия совместности, обеспечивающие однозначную разрешимость задач с начальными данными; точнее доказано, что многообразие решения (3) в одних случаях содержит не более восьми произвольных постоянных, а в других случаях произвольную функцию.

Литература

1. Пиров Р. Крайові задачі для диференціальних рівнянь Збірник наукових праць, выпуск ll, Чернівці, выдавництво "Прут", 2004, стр. 98-115.
2. Пиров Р. Вестник Хорогского Госуниверститета, Хорог, 2002, серия 1 (естественных наук), №5, стр. 32-35.
3. Пиров Р. Докл. АН.. РТ, т. 18, є 3-4, стр. 37-42 и 43-49.
4. Пиров Р. Паем Института Предприниательства и Сервиса, №13, Душанбе, 2005, стр. 69-72.

УДК 517.956

Об одном классе модельного гиперболического уравнения с двумя граничными особенными линиями

Раджабова Л.Н.
(Таджикский транспортный институт)

Через D обозначим прямоугольник $D = \{(x,y) : a < x < a_0, b_0 < y < b\}$. Соответственно обозначим $\Gamma_1 = \{a < x < a_0, y = b\}$, $\Gamma_2 = \{x = a_0, b_0 < y < b\}$.

В области D рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\lambda}{x-a}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\mu}{b-y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\delta}{(x-a)(b-y)}u = \frac{f(x,y)}{(x-a)(b-y)} \qquad (1)$$

Задача о нахождении многообразия решений гиперболического уравнения (1) теснейшим образом связано с теорий двумерных интегральных уравнений типа Вальтерра с фиксированными особенными и сильно-особенными граничными ядрами.

Через $C_2(D)$ обозначим класс функций $u(x,y) \in C^1(D)$, для которого $u_{x,y} \in C(D)$. Справедливы следующие утверждение

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1) $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,y) = 0$, $f(x,b) = 0$ с аситмптотическими поведениями*

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_1}(b-y)^{\gamma_1}], \quad \gamma_1 > |\mu|, \quad \delta_1 > |\lambda| \qquad (2)$$

Тогда любое решение уравнения (1) представимо в виде

$$u(x,y) \equiv K_1^{1,1}[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \psi_1(y), \psi_2(y)] + T_a^x(T_b^y(f))$$

где $K_1^{1,1}$, T_a^x, T_b^y – известные интегральные операторы, а $\varphi_j(x)$, $\psi_j(y)$, $j = 1, 2$–произвольные непрерывные функции точек Γ_1 и Γ_2 удовлетворяющие условиям $\varphi_1(x) \in C^1(\Gamma_1)$, $\psi_1(y) \in C^1(\Gamma_2)$, с асимптотическими поведениями

$$\varphi_1(x) = o[(x-a)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad x \to a,$$

$$\psi_1(y) = o[(b-y)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad y \to b,$$

$\varphi_2(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $\psi_2(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ с асимптотическими поведениями

$$\varphi_2(x) = o[(x-a)^{\delta_2}], \quad \delta_2 > |\lambda| \quad \text{при} \quad x \to a,$$

$$\psi_2(y) = o[(b-y)^{\gamma_2}], \quad \gamma_2 > |\mu| \quad \text{при} \quad y \to b,$$

причем это решение на Γ_1 и Γ_2 обрашается в нуль с асимптотическими поведениями

$$u(x,y) = o[(x-a)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad x \to a,$$

$$u(x,y) = o[(b-y)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad y \to b.$$

Аналогичные утверждения получены и в случаях $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\delta = -\lambda\mu$; $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta = -\lambda\mu$; $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\delta = -\lambda\mu$; $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\delta \neq -\lambda\mu$; $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\delta \neq -\lambda\mu$; $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\delta \neq -\lambda\mu$; $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta \neq -\lambda\mu$.

Интегральное представление, полученное в теореме 1, дает возможность для уравнения (1) ставить и исследовать задачи типа Дарбу .

Задача D_1**.** *Требуется найти решение уравнения (1) из класса* $C_2(D)$ *по граничным условиям:*

$$[(b-y)^\mu . u(x,y)]_{y=b} = A(x) \qquad (D_1^1)$$

$$[(x-a)^\lambda P_\mu^y(u)]_{x=a} = B(y) \qquad (D_1^2)$$

где

$$P_\mu^y \equiv \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\mu}{b-y},$$

$A(x)$*– заданная непрерывная функция точек* Γ_1, $B(y)$*– заданная непрерывная функции точек* Γ_2.

Задача D_2. *Требуется найти решение уравнения (1) из класса* $C_2(D)$ *по граничным условиям:*

$$[(x-a)^{\lambda}u(x,y)]_{x=a} = B_1(y) \qquad (D_2^1)$$

$$[(b-y)^{\mu}P_{\lambda}^{x}(u)]_{y=b} = A_1(x) \qquad (D_2^2)$$

где

$$P_{\lambda}^{x} \equiv \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\lambda}{x-a},$$

$A(x)$, $A_1(x)$, $B_1(y)$ *– заданные функции точек* Γ_1 *и* Γ_2.

УДК 517.956

Радиально-симметричные решения одного класса комплексного двумерного интегрального уравнения с граничным фиксированным сверх-сингулярным ядром

Раджабов Н.
(Таджикский государственный национальный университет, г.Душанбе)

Через D^+ обозначим окружность $D^+ = \{|z| < R\}$ и через $\Gamma = \{|z| = R\}$ его границу. В области D^+ рассмотрим комплексное интегральное уравнение следующего вида

$$W(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D^+} \frac{exp[i\psi](A(\rho)W(t) + B(\rho)\overline{W(t)})}{(R-\rho)^{\alpha}(t-z)} d\xi d\eta = f(z), \qquad (1)$$

где $\alpha = constant > 0$, $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, $t = \xi + i\eta$, $\varphi = argt$, $z = x + iy$, $A(\rho)$, $B(\rho)$, $f(z)$– заданные функции $W(z)$– искомая функция.

Интегральное уравнение (1) при $B(\rho) = 0$ было изучено в [1], [2]. В зависимости от $\alpha(\alpha < 1, \alpha = 1, \alpha > 1)$ и знака число $ReA(R)$, было найдено решение интегрального уравнения (1) в явном виде. В случае, когда $A(\rho), B(\rho)$ вещественные $\alpha > 1$, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть в интегральном уравнение (1)* $\alpha > 1$, $A(\rho), B(\rho) \in C(\overline{D^+})$ *и являются вещественными,* $A(R) > 0$, $B(R) >$

0. Разность $A(R)-A(r)$ *и* $B(R)-B(r)$ *обращаются в нуль со следующими асимптотическими поведениями* $A(R)-A(r)=0[(R-r)^{\gamma_1}]$, $B(R)-B(r)=0[(R-r)^{\gamma_1}]$, $\gamma_1>\alpha-1$ *при* $r\to R$. *Кроме того пусть* $f(z)=f(r)=f_1(r)+if_2(r)\in C(\overline{D^+})$. *Функции* $f_1(r)$ *и* $f_2(r)$ *обращаются в нуль на* Γ *со следующими асимптотическими поведениями при* $r\to R$

$$f_1(r)=o[\exp[-(A(R)+B(R))\omega_R^\alpha(r)](R-r)^{\gamma_2}],\quad \gamma_2>\alpha,$$

$$f_2(r)=o[\exp[(B(R)-A(R))w_R^\alpha(r)](R-r)^{\gamma_3}],\quad \gamma_3>\alpha-1,$$

когда $B(R)<A(R)$ *и* $f_2(r)=o[(R-r)^{\gamma_4}]$, $\gamma_4>\alpha-1$, *когда* $B(R)>A(R)$. *Тогда интегральное уравнение (1) в классе функций* $W(z)=W(r)\in C(\overline{D^+})$, *обращающиеся в нуль на* Γ *с асиптотическим поведением* $W(z)=o[(R-r)^{\gamma_5}]$, $\gamma_5>\alpha-1$, *всегда разрешимо и его общее решение дается формулой*

$$W(z)=\exp[-(A(R)+B(R))\omega_R^\alpha(r)-(W_{A,R}^{-,\alpha}(r)+W_{B,R}^{-,\alpha}(r))]c_1+\Omega_\alpha^-[f(r)],$$

где c_1 *– произвольная вещественная постоянная,*

$$\Omega_\alpha^-[f(r)]=f(r)+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D^+}\Big\{[exp[A(R)+B(R))(\omega_R^\alpha(\rho)-\omega_R^\alpha(r))+W_{A,R}^{-,\alpha}(\rho)-$$

$$-W_{A,R}^{-,\alpha}(r)+W_{B,R}^{-,\alpha}(\rho)-W_{B,R}^{-,\alpha}(r)]\cdot(A(\rho)+B(\rho))+exp[(A(R)-B(R))(\omega_R^\alpha(\rho)-$$

$$-\omega_R^\alpha(r))+W_{A,R}^{-,\alpha}(\rho)-W_{A,R}^{-,\alpha}(r)+W_{B,R}^{-,\alpha}(r)-W_{B,R}^{-,\alpha}(\rho)](A(\rho)-B(\rho))f(\rho)+$$

$$+\Big[exp[(A(R)+B(R))(\omega_R^\alpha(\rho)-\omega_R^\alpha(r))+W_{A,R}^{-,\alpha}(\rho)-W_{A,R}^{-,\alpha}(r)+W_{B,R}^{-,\alpha}(\rho)-$$

$$W_{B,R}^{-,\alpha}(r)](A(\rho)+B(\rho))--exp[(A(R)-B(R))(\omega_R^\alpha(\rho)-\omega_R^\alpha(r))+W_{A,R}^{-,\alpha}(\rho)-$$

$$-W_{A,R}^{-,\alpha}(r)+W_{B,R}^{-,\alpha}(r)-W_{B,R}^{-,\alpha}(\rho)](A(\rho)-B(\rho))\Big]\overline{f(\rho)}\Big\}\cdot\frac{exp[i\psi]d\xi d\eta}{(R-\rho)^\alpha(t-z)},$$

$$\omega_R^\alpha(r)=\Big[(\alpha-1)(R-r)^{\alpha-1}\Big]^{-1},$$

$$W_{A,R}^{-,\alpha}(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D^+}\frac{exp[i\psi](A(R)-A(\rho))d\xi d\eta}{(R-\rho)^\alpha(t-z)},$$

$$W_{B,R}^{-,\alpha}(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D^+}\frac{exp[i\psi](B(R)-B(\rho))d\xi d\eta}{(R-\rho)^\alpha(t-z)},$$

Замечание 1. *Утверждение подобное теореме 1 получено и в случаях* *a)* $\alpha > 1, A(R) < 0, B(R) > 0$; *b)* $\alpha > 1, A(R) > 0, B(R) < 0$; *c)* $A(R) < 0, B(R) < 0$.

Замечание 2. *В частности, когда $B(\rho) = 0$, результаты полученные в теореме 1 совпадают с результатами полученное в [1] и [2].*

Литература

1. Раджабов Н. Явное решение одного класса двумерного комплексного интегрального уравнения второго рода с сингулярными и суперсингулярными ядрами на границе области.|| Материалы международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения", Душанбе - 2000, с. 72-73.

2. Rajabov N An explicit solution to a class of a second kind complex integral equation with singular and super-singular kernel. || Functional-Analytic and Complex Methods, their Interactions and Applications to Partial Differential Equations, World Scientific, New-Jersey-London-Singapour-Hong Kong, 2001, pp 313-329.

УДК 511.

Асимптотическая формула для короткой квадратичной тригонометрической суммы с простыми числами

Рахмонов З.Х.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

В работе получена асимптотическая формула для квадратичной тригонометрической суммы с простыми числами, переменная суммирования которых принимает значения из коротких интервалов, в множество точек первого класса

Пусть $N(\alpha, T, \chi)$-число нулей $\rho = \beta + i\gamma$ L-функции Дирихле по модулю q в области $Res \geq \alpha \geq 0,5,\ 0 \leq Ims \leq T$. Если χ-главный характер, тогда $N(\sigma, T, \chi) = N(\sigma, T)$-число нулей функция Римана $\zeta(s)$ в указанной области.

Определение. *Пусть $c \geq 2$, $B \geq 1$ абсолютные постоянные, $T \geq T_0 > 0$, $H^c > T$, тогда оценки вида*

$$\sum_{\chi}[N(\alpha, T+H, \chi) - N(\alpha, T, \chi) \ll (qT)^{c(1-\alpha)}(\ln qT)^B \qquad (1)$$

называются плотностными теоремами в коротких прямоугольниках критической полосы.

Основным результатом работы является теорема устанавливающая связь плотностных теорем для нулей L-рядов Дирихле в коротких прямоугольниках критической полосы, с оценками квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами, переменная суммирования которых принимает значение из коротких интервалов, т.е. с суммами вида:

$$S_2(\alpha,x,y)=\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)e(\alpha n^2),\alpha=a/q+\lambda,\quad |\lambda|\le 1/q\tau,\quad 1\le q\le\tau.$$

Теорема. *Пусть* $x\ge x_0>2$, $h\le x^{1/c}$, $y\ge hx^{(c-1)/c}\exp(\ln x)^{0,76}$, $\tau\ge y^2/h$, $l=\ln x$, $\alpha=a/q+\lambda$, $(a,q)=1$, $1\le q\le h$, $|\lambda|\le 1/q\tau$, b — *произвольное фиксированное неотрицательное число,*

$$\tau_2(\chi,a)=\sum_{k=1}^{q}\chi(k)e(ak^2/q)),$$

$$F(q,x)=\begin{cases}\exp(-\ln^4\ln x) & \text{\textit{если} } q\le(\ln x)^b,\\ 1 & \text{\textit{если} } q>(\ln x)^b.\end{cases}$$

Тогда справедливо равенство:

$$S_2(\alpha;x,y)=\frac{y}{\varphi(q)}\sum_{\substack{k=1\\(k,q)=1}}^{q}e(ak^2/q)\int\limits_0^1 e(\lambda(x-ty)^2)dt+R(\alpha;x,y).$$

$$R(\alpha;x,y)\ll O\left(\max_{\chi mod q}|\tau_2(\chi,a)|\frac{yl^{B+2}}{\varphi(q)}F(q,x)\right).$$

Из плотностной теоремы Zhan Tao [1] для нулей L-рядов Дирихле в коротких промежутках критической полосы следует, что в (1) $c\le 8/3$, $B=216$.

Литература

1. Zhan Tao. The mean square value of Dirichlet L–functions. chinese Adv.Math.2(1989).

УДК 517.945

О краевой задаче для вырождающейся системы уравнений первого порядка на плоскости

Сангинов А.
(ТТУ, г.Душанбе)

Рассматривается следующая вырождающейся система уравнений составного типа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \dfrac{A(z)}{|y|^{\alpha}} w(z) + \dfrac{B(z)}{|y|^{\alpha}} \bar{w}(z) = 0, \quad \alpha > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Re[D(z)w(z)]. \end{cases} \tag{1}$$

в правильной по направлении оси Oy односвязной области G, частью границы которой состоит из отрезка оси $y = 0$, $w(z)$-комплекснозначная, $u(z)$–вещественная искомые функции.

Коэффициенты $A(z)|y|^{-\alpha}$ и $B(z)|y|^{-\alpha}$ при $\alpha \geq \frac{1}{2}$, вообще говоря, не интегрируемы со степени $p > 2$.

Исследуется следующая задача.

Требуется найти непрерывные по Гёлдеру в $G_{\cup}\Gamma$ решения системы (1) при $0 < \alpha < 1$, удовлетворяющие краевому условию

$$\begin{aligned} &a_1(t)u(t) + Re[b_1(t)w(t)] = h_1(t), t \in \Gamma = \gamma + [a, b], \\ &a_2(t)u(t) + Re[b_2(t)w(t)] = h_2(t), t \in \gamma, \end{aligned} \tag{2}$$

где $b_1(t), b_2(t)$– комплекснозначные, а $a_1(t), a_2(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$–вещественные заданные функции в соответствующих контурах.

Исследование этой задачи опирается на свойства интегрального оператора

$$Tw = \frac{1}{\pi} \iint\limits_G \left[\frac{A(\zeta)}{|\eta|^{\alpha}} w + \frac{B(\zeta)}{|\eta|^{\alpha}} \bar{w} \right] \frac{dG_{\zeta}}{\zeta - z}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

В [1] показано, что оператор T является ограниченным в $C_{\beta}(\bar{G})$, $\beta \leq 1 - \alpha$ и вполне непрерывным.

Первое уравнение системы (1) эквивалентно интегральному уравнению Фредгольма

$$w(t) - Tw = \Phi(z), \tag{4}$$

решение которого можно представить в виде

$$w(z) = \Phi(z) + \iint\limits_G [\Gamma_1(z, \zeta)\Phi(\zeta) + \Gamma_2(z, \zeta)\overline{\Phi(\zeta)}] d\Gamma_{\zeta}, \tag{5}$$

где $\Phi(z)$– произвольная аналитическая функция, $\Gamma_1(z, \zeta)$, $\Gamma_2(z, \zeta)$–резольвенты интегрального уравнения (4).

Подставляя (5) во второе уравнение системы (1) и интегрируя, находим

$$u(z)=\int\limits_{y_0}^{y} Re\Big\{D(t)\left[\Phi(t)+\iint\limits_G \Gamma_1(z,\zeta)\Phi(\zeta)+\Gamma_2(z,\zeta)\overline{\Phi(\zeta)}\right]dG_\zeta\Big\}dt+w(x), \tag{6}$$

где $w(x)$-произвольная вещественная функция зависящая только от x.

Пусть $\Delta(t)=a_1(t)b_2(t)-a_2(t)b_1(t)\neq 0,\ t\in\gamma, b_1(t)\neq 0, t\in[a,b]$.

При выполнении этих условий поставленная задача нормально разрешима, а ее индекс вычисляется по формуле [2]

$$\chi=Ind[G(t)]_\Gamma,$$

где

$$G(t)=\begin{cases}\Delta(t), & t\in\gamma,\\ b_1(t), & t\in[a,b],\end{cases}, \quad \Gamma=\gamma+[a,b].$$

Литература

1. Д. Муртазаев: О краевой задаче для вырождающейся эллиптической системы. ДАН. СССР, 1974, т.217, №2.

2. А.Джураев. Системы уравнений составного типа, Наука, 1972 г.

УДК 517.95

Двоякопериодические решения одного класса нелинейных эллиптических систем второго порядка

Сафаров Дж. С.
(Кургантюбинский госуниверситет им. Н. Хусрава, г.Кургантюбе)

На комплексной плоскости C рассмотрим эллиптическую систему записанную в комплексной форме [1]

$$w_{\overline{z}\overline{z}} + a(z)w_{\overline{z}} + b(z)w = d(z)w^2, \tag{1}$$

где $z = x + iy$, $w_{\overline{z}} = 0,5(w_x + iw_y)$, $a(z)$, $b(z)$, $d(z)$–заданные на непрерывно дифференцируемые, двоякопериодические функции, с основными периодами h_1, h_2, $Im\frac{h_2}{h_1} > 0$.

Будем искать двоякопериодические решения уравнения (1), с основными периодами h_1, h_2, $Im\frac{h_2}{h_1} > 0$ и имеющие в параллелограмме периодов Ω особые точки, как у эллиптических функций [2]

Используя результаты работы автора [3], покажем, что уравнение (1) имеет решение с периодами

$$h_1^6 = \frac{140}{\gamma} \sum_{\substack{m_1, m_2 = -\infty \\ m_1 \neq 0, m_2 \neq 0}}^{\infty} (m_1 + \rho m_2)^{-6}, \quad h_2 = \rho h_1, \tag{2}$$

где $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, γ–произвольное комплексное число.

Обозначим через Ω параллелограмм периодов построенный с помощью h_1, h_2.

Теорема. *Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям:*

$$a_0 = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} (z) d\Omega = 0, \quad d(z) = \frac{1}{6} e^{\frac{1}{2} T_\varsigma a}, \qquad 2a_{\overline{z}} + a^2 = 4b,$$

тогда уравнение (1) имеет решение вида

$$W(z) = e^{-\frac{1}{2}\varsigma a} \wp(\bar{z}),$$

$\wp$ (z)-“ро” функция Вейерштрасса,

$$T_\zeta a = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} a(\tau) \zeta(\tau - z) d\Omega,$$

ς (z)-“дзетта” функция Вейерштрасса.

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М, 1981, с.-448.

2. Ахиезер И.И. Элементы теории эллиптических функции. М., Наука, 1970, с.-304.

3. Сафаров Д. С. Двоякопериодические решения эллиптических систем первого порядка. Дифференциальные уравнения, 1991, том.27, є4, с.-656-664.

УДК 517.94

Периодическое решение разностного уравнения Риккати.

Сафаров Дж.С., Гулов Х.М.
(КГУ им. Носира Хусрава)

В работе исследуется условия существования и нахождения периодических решений разностного уравнения Риккати вида

$$\Delta y(x) = y(x+1) - y(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x) \tag{1}$$

Уравнение (1) описывает дискретные процессы в задачах естествознании, экономики и т.д. [1]. Здесь $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ – заданные определенные на множестве $N \cup \{0\}$, $N = 1, 2, 3, \ldots$ периодические с периодом T, $T > 1$ функции , $y(x)$–искомая T–периодическая функция.

Используя случаи интегрируемости уравнения (1) в непрерывных случаях [2], найдем T–периодические решения заданного уравнения.

Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию

$$a(x) + b(x) + c(x) \equiv 0. \tag{2}$$

Периодическое решение уравнения (1) будем искать в виде

$$y(x) = 1 + u(x) \cdot v(x). \tag{3}$$

тогда для $u(x)$ и $V(x)$ с учетом условие (2) получим разностное уравнение вида

$$u(x+1)\Delta\nu(x) + \nu(x)\Delta u(x) = au^2(x)\nu^2(x) + 2au(x)\nu(x) + bu(x)\nu(x). \tag{4}$$

Теперь $u(x)$ выберем так чтобы удовлетворяло уравнению

$$\Delta u(x) = [2a(x) + b(x)]u(x) \tag{5}$$

Это уравнение всегда имеет нулевое периодическое решение. Требуется найти нетривиальные T–периодические решение уравнения (5).

Решением уравниния (5) является

$$u(x) = \prod_{t=0}^{x-1}(1 + 2a(t) + b(t)), \quad u(0) = 1. \tag{6}$$

И это решение является T–периодическим тогда и только тогда, когда

$$\prod_{t=0}^{T-1}(1 + 2a(t) + b(t)) = 1. \tag{7}$$

Действительно, будем иметь

$$u(x+T) = \prod_{t=0}^{x+T-1}(1+2a(t)+b(t)) = \prod_{t=0}^{x-1}(1+2a(t)+b(t)) \prod_{t=0}^{T-1}(1+2a(t)+b(t)) =$$

$$= u(x)\prod_{t=0}^{T-1}(1 + 2a(t) + b(t)) = u(x).$$

Отсюда следует требуемое утверждение.

Пусть теперь выполнено условие (7). Тогда для функции $v(x)$ получим нелинейное уравнения вида

$$\Delta\nu(x) = \frac{a(x)u^2(x)\nu^2(x)}{u(x+1)} \tag{8}$$

Подставляя (6) в правой части (8) получим

$$\Delta\nu(x) = B(x)\nu^2(x), \tag{9}$$

где

$$B(x) = \frac{a(x)\prod\limits_{t=0}^{x-1}(1 + 2a(t) + b(t))}{1 + 2a(x) + b(x)}. \tag{10}$$

Решение уравнения (9) при $v(0) = 1$ имеет вид

$$\nu(x) = 1 + \sum_{t=0}^{x-1} B(t)\widetilde{B}(t-1), \tag{11}$$

$$\widetilde{B}(x)=\widetilde{B}(x-1)+B(x)\widetilde{B^2}(x-1), \tag{12}$$

где

$$\widetilde{B}(0)=1+B(0).$$

Такое решение будет T–периодическим, если если выполняется условие

$$\sum_{t=0}^{T-1}B(t)\widetilde{B}(t-1)=0. \tag{13}$$

Таким образом, если коэффициенты уравниния (1) удовлетворяют условиам (2), (7) и (13), тогда уравнение имеет T–периодическое решение

$$y(x)=1+\prod_{t=0}^{x-1}[1+2a(t)+b(t)]\left[1+\sum_{\tau=0}^{x-1}B(\tau)\widetilde{B}(\tau-1)\right]$$

с начальным условием $y(0)=2$.

Литература

1. Мартынюк Д.И. // Лекции по качественной теории разностных уравнений. Киев. Наукова думка, 1972.-246стр.
2. Kourensky M. //Proceedings London Math. Soc. (2), 24 (1926) стр.202-210.

УДК 517.94

Ограниченное решение обобщенного уравнения Дуффинга с переменными коэффициентами

Сафаров Дж.С., Рахимов З.Х.
(КГУ им. Носира Хусрава)

На полупрямой $R_+=[0,+\infty)$, рассмотрим уравнение вида.

$$u''(t)+a(t)u''(t)+b(t)u(t)=c(t)u^n(t), \tag{1}$$

где $a(t),\ b(t),\ c(t)-$ задание функции, $n>1$.

В случае n=3 уравнение (1) известно под названием уравнение Дуффинга, которое встречается в нелинейной механике [1].

Будем искать ограниченное решение уравнение (1) из класса $C^2\ (t>0)\cap C^1(t\geq 0)$.

Теорема. *Пусть* $(t) \in C^1(t \geq 0), a(t) \geq k > 0, b(t), c(t) \in C(t \geq 0)$ *и удовлетворяют условиям:*

$$b(t) = \frac{a'(t)}{2} + \frac{a^2(t)}{2} - \frac{4n}{n-1}$$

$$(t) = \frac{2(n+1)}{n-1} \exp\left(\frac{n-1}{2}\int\limits_0^t a(\tau)d\tau\right),$$

тогда уравнение (1) имеет ограниченное решение вида

$$u(t) = \frac{1}{ch^{\frac{2}{n-1}}(t+D)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t a(\tau)d\tau\right),$$

где D–произвольное постоянное.

Литература

1. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы в нелинейной механике, М., Наука, 1982, 560 с.

УДК 519.87:627.8

Исследования по информатизации таджикского языка

Усманов З.Д.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

В настоящем сообщении речь идет, в основном, о тех исследованиях, которые выполнены мною совместно с моими сотрудниками и аспирантами по проблеме информатизации таджикского языка и устремлены, в конечном счете, к реализации на компьютере автоматического перевода с таджикского языка на другие естественные языки, и наоборот. На пути достижения этой цели проделана следующая работа.

Изучены статистические закономерности частоты встречаемости букв в текстах на таджикском языке, получены экспертные оценки по трудоемкости нажатия на те или иные клавиши компьютерной клавиатуры. На этой основе определена оптимальная раскладка таджикских букв на компьютерной клавиатуре.

В связи с тем, что задача оптимальной раскладки оказалась в равной мере актуальной, по существу, для всех естественных языков мира, предложен общий подход к решению этой проблемы и указаны таковые раскладки для английского, русского, узбекского языков и искусственного языка эсперанто (совместно с О.Солиевым, Ш. Шариповым, С.ïкубзода).

Поскольку в Таджикистане до недавнего времени не существовало стандарта таджикской компьютерной графики, нами разработана компьютерная программа, позволяющая пользователям INTERNET в диалоговом режиме разворачивать на своих компьютерах разработанный нами драйвер автоматической установки стандарта таджикской компьютерной графики и принятую Межведомственной Рабочей Группы при Министерстве связи РТ временную раскладку таджикских букв на компьютерной клавиатуре (совместно с О.Солиевым).

В Национальном патентно-лицензионном центре Министерства экономики и торговли РТ зарегистрирован патент (интеллектуальный продукт) 007 TJ 14 октября 2005 под названием "Программно-технический комплекс для автоматического безударного озвучивания текстов на таджикском языке".

В плане реализации патента выявлена слоговая структура таджикских слов и изучена частота встречаемости слогов в текстах. Выполнены предварительные эксперименты по озвучиванию слогов и слов на малых массивах данных (совместно с Х. Худойбердыевым, А. Абдухамидовым, М. Исмаиловым).

Разработаны основы автоматического морфологического анализа (М. Исмаиловым). Осуществлено дальнейшее углубленное развитие морфологического анализа (Р.Назаров). Подготавливается компьютерная реализация автоматического морфологического анализа (Р.Назаров).

На основе морфологического анализа предложена β – версия таджикского компьютерного корректора (совместно с Д.Гафуровым). Разработанный корректор достаточно быстро диагностирует правильность написания слов, однако довольно медленно выдает варианты исправления допущенных ошибок (рекордное время – 44 секунды). Использованное нами решение проблемы создания компьютерного корректора, по крайней мере, на сегодняшний день оказалось в тупиковой ситуации в связи с тем, что сейчас плохо просматриваются пути устранения выявленных недостатков.

Начато продвижение по принципиально новому пути, основанному на чисто математических решениях проблемы с максимальным использованием памяти и быстродействия современных компьютеров (совместно с Х.Худойбердыевым). Важно отметить, что новый подход в создании корректора принимает во внимание ныне утвержденный стандарт таджикской компьютерной графики и принятое размещение на компьютерной клавиатуре букв таджикского алфавита.

Разработан алгоритм компьютерного перевода простого нераспространенного английского предложения на таджикский язык, (совместно с М.А.Исмаиловым, С.А.Зариповым). Осуществлена компьютерная реализация такого перевода (С.А.Зарипов).

Литература

1. Автоматизированное распознавание элементов таджикского словаря, порождающих заданные словоформы / З.Д.Усманов, М.А.Исмаилов // Докл. АН ТаджССР. - 1990. - Т.33, №11. - С.725-728. - Рез.тадж.

2. Концепция автоматизированного распознавания словоформ таджикского языка / З.Д.Усманов, М.А.Исмаилов // Докл. АН ТаджССР. - 1990. - Т.33, №1. - С.16-18. - Рез.тадж.

3. О статистических закономерностях слогового многообразия таджикского языка, // ДАН РТ, 2002, Т.45, №5-6, 9-14 (соавторы А.А.Абдухамидов ,М.А.Исмаилов,)

4. Распознавание словоформ таджикского языка, // ДАН РТ, 2002, Т.45, №5-6, 4-8 (соавторы М.А.Исмаилов, Д.А.Гафуров)

5. Алгоритм компьютерного перевода простого нераспространенного английского предложения на таджикский язык, // ДАН РТ, Т.45, №3-4, 81-87 (соавторы .А.Исмаилов, С.А.Зарипов)

6. Закономерности статистического распределения частот встречаемости букв в таджикском языке, // ДАН РТ, Т. 46, №3-4, 2003, с.59-62 (соавтор О.М.Солиев).

7. Задача о клавиатуре. // Программные продукты и системы, Москва, 2003, №3, 31-33

8. Об оптимальной раскладке символов на клавиатуре.// Программные продукты и системы, Москва, 2004, №2, 32-39

9. О “наилучшей” раскладке таджикских букв на компьютерной клавиатуре. // ДАН РТ, Т 47, №3, 56-61 (соавтор О.М.Солиев).

10. К вопросу о “наилучших” раскладках английских и русских символов на компьютерной клавиатуре. // Программные продукты и системы, Москва, 2004, є 4, 38 – 41. (соавтор О.М.Солиев).

11. О статистических закономерностях языка Эсперанто // ДАН РТ, Т.48, №3-4, с. (соавтор С.їкубзода).

12. О наилучшей раскладке алфавита Эсперанто на компьютерной клавиатуре, Деп. №28 (1712) от 13.09.2005 ; Эл. научный журнал “Наука, технологии и интеллектуальная собственность Таджикистана”, код ГРНТИ 20, раздел “Информатика”, *www.science.tj* (соавтор

С.Екубзода).
13. Программно-технический комплекс для автоматического безударного озвучивания текстов на таджикском языке, Патент (интеллектуальный продукт) зарегистрирован 007 TJ 14 октября 2005 Национальным патентно-лицензионным центром Министерства экономики и торговли РТ .
14. О статистических инвариантах узбекского литературного языка // ДАН РТ, Т.49, №1 , с. 10-14 (соавтор Ш.А.Шарипов)
15. О множестве парадигм языка Эсперанто // ДАН РТ, Т. , є , с. (соавтор С.їкубзода)

УДК 519.87:627.8

Модель распределения тектонических тектонических напряжений на поверхности земного шара

Каримов Ф.Х., Усманов З.Д.
(Институт сейсмостойкого строительства и сейсмологии, Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

В работе исследуется состояние относительного покоя материальной точки под действием центральной гравитационной силы и силы сухого трения на поверхности сферы, вращающейся с заданной с угловой скоростью. Обнаружено, что северный и южный полюсы, а вместе с ними и небольшие сферические шапки вокруг них, всегда принадлежат множеству положений устойчивого равновесия материальной точки. Установлено также, что если при некоторых значениях параметров, характеризующих действующие силы и режим вращения сферы, проявляются неравновесные состояния, то их множество представляет собой симметричный по отношению к экватору сферический пояс.

Предложенная в работе методика исследований может быть использована для анализа крутильных колебаний земного шара, в частности чандлеровских колебаний, а также к изучению равновесия геоблоков на земной поверхности, нарушение которого при изменениях скорости вращения Земли может приводить к накоплению тектонических напряжений и, тем самым, к подвижкам геоблоков – землетрясениям.

Уравнения равновесного положения точки массой m на сфере радиуса R в поле действия центральной силы гравитации, центробежной силы и силы трения приводит к равенству

$$f^2\left(\frac{\mu Mm}{R^2}-m\Omega^2R\cos^2\theta_0\right)^2=m^2R^2cos^2\theta_0(\dot{\Omega}^2+\Omega^4\sin^2\theta_0), \qquad (1)$$

где M–масса шара, μ–гравитационная постоянная, f–коэффициент трения скольжения, координата широты точки θ_0, Ω–вектор угловой скорости вращения шара.

Отсюда

$$f^2=\frac{cos^2\theta_0(\dot{\Omega}^2/\Omega^4+\sin^2\theta_0)}{(M/m_0-\cos^2\theta_0)^2}, \quad m_0=\frac{\Omega^2R^3}{\mu}. \qquad (2)$$

Соотношения (1–2) определяют геометрическое место тех точек на сфере, в которых проявляется неустойчивость равновесного состояния материальной точки на вращающейся сфере.

Предположим, что сфера S вращается с постоянной угловой скоростью Ω_0, т.е. $\dot{\Omega}=0$, $\Omega=\Omega_0$, $\Omega_0=const$. Тогда при $\theta_0=0$ материальная точка будет находиться на экваторе и соотношение (1) снова нарушится, поскольку правая часть обращается в нуль. Следовательно, точки, расположенные на экваторе, также окажутся точками устойчивого равновесия. Но тогда в силу непрерывности $sin\theta_0$ нарушение соотношения (2) распространяется также на широты $\theta_0=\pm\varepsilon_1$, где ε_1–достаточно малое положительное число. В свою очередь это означает, что все точки в широтах $-\varepsilon_1\le\theta_0\le\varepsilon_1$ будут являться положениями устойчивого равновесия. Если в дополнение к предыдущему Ω_0 достаточно мало, то f^2 будет больше правой части соотношения (8). А это значит, что все точки сферы от южного до северного полюса оказываются положениями устойчивого равновесия материальной точки. Аналогичный результат имеет место для достаточно малых значений массы m или же радиуса шара R, при которых соотношение (8) также не выполняется.

Отношение m_0/M (2) равно отношению силы тяжести к центробежной силе, которые действуют на рассматриваемую материальную точку на экваторе: $q=0,001387$. Т.е. отношение m_0/M много меньше единицы. Поэтому (2) можно представить в виде

$$f=\pm qsin\theta_0cos\theta_0. \qquad (3)$$

Выражение (3) показывает, точки устойчивости расположены симметрично относительно экваториальной плоскости. Если отношение f/q больше, чем 0,5, то во всех точках сферы положение равновесия материальной точки устойчиво. Если отношение f/q меньше, чем 0,5, то существует сферический сегмент около полюсов и экваториальный пояс, в пределах которых положение равновесия материальной точки устойчиво, и существует сферический пояс между ними, где это положение неустойчиво. При f/q, равном 0,5, $\theta_0 = 45^0$, и сферический сегмент и экваториальный пояс полностью перекрывают множество точек устойчивости на всей поверхности сферы.

Центробежные силы, действуя против сил притяжения, приводят к уменьшению сил трения и сцепления между плитами и подстилающими слоями. Происходит некоторая компенсация сил давления плит на подстилающие слои, а ускорение или замедление вращения Земли может приводить к неустойчивости плит и их перемещению. Условия потери их устойчивости определяется соотношениями (2,3). Начавшееся движение плит сопровождается также действием кориолисовой силы, действующей в азимутальном направлении и смещающей плиту в широтном направлении, горные хребты и островные дуги, широко распространчнные на поверхности Земли

Существование шапок, приподнятых геоблоков на полюсах, свидетельствуют о малости центробежной силы для их перемещения к средним широтам. На крыльях разлома земной коры, который проходит вблизи северного полюса, действуют горизонтально направленные растяжения. Возможно, это результат действия центробежных сил. Альпийско-Гималайский сейсмотектонический пояс ориентирован почти субширотно. Его появление можно объяснить неустойчивостью геоблоков на земной поверхности вдоль сферического пояса в средних широтах при малых коэффициентах трения. Почти на всчм протяжении Альпийско-Гималайского пояса действуют силы сжатия, обусловленные, по-видимому, снижением действия центробежных сил в результате замедления вращения земного шара. В средних широтах южного полушария такой пояс не возник, поскольку образованием Альпийско-Гималайского уже были сняты напряжения земной коры.

Очевидно, физический смысл полученного решения состоит в том, что в достаточно малых окрестностях полюсов положение равновесия точки определяют сила гравитации и сила реакции опоры. Здесь малы роли центробежной силы и силы трения. В точках, достаточно близких к экватору, положения равновесия определяет алгебраическая сумма силы тяжести, с одной стороны, центробежной силы и реакции опоры, - с другой. В промежуточных широтах начинает играть роль и сила трения.

УДК 517.9

Об одной смешанной краевой задачи для кусочно-аналитических функции в многосвязной области в сингулярном случае

Усманов Н, Холикова М.
(Налогово-правовой институт,ТГПУ им. К. Ш. Джураева))

Пусть D^+ конечная $(m+1)$ -связная область, ограниченная совокупностью $m+1$ замкнутых непересекающихся кривых Ляпунова $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_m = \Gamma$, причем кривая Γ_0 содержит внутри себя все остальные. Через D^- обозначим дополнение $D^+ \cup \Gamma_0$ до полной комплексной плоскости $\overline{C}$, состоящее из m односвязных конечных областей $D_1^-, D_2^-, ..., D_m^-$, ограниченных соответственно кривыми $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m$ и одной бесконечной области D_0, все точки которой лежат вне кривой Γ_0.

Положительным обходом границы Γ принимается тот, при котором область D^+ остачтся слева. В области D^+ на положительном расстоянии от границы Γ расположена простая гладкая замкнутая кривая γ. За положительное направление обхода кривой γ принимается обход кривой против часовой стрелки.

Через Δ^+ обозначим ту часть области D^+ которая лежит внутри кривой γ, через Δ^+ остальную часть области D^+.

Через $\varphi_2^{\pm}(t), \varphi_2^{\pm}(t)$ обозначим предельные значения функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ когда $z \to t \in \gamma$ слева или справа от кривой γ.

Требуется найти кусочно-аналитические $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$ в области D^+ функции, H- непрерывно продолжимые на кривые Γ и γ, с линией сопряжения γ по следующим краевым условиям:

$$\varphi_1^+(t) = a(t)\overline{\varphi_2^-(t)} + h(t), \ t \in \Gamma \tag{1}$$

$$\varphi_1^+(t) = G_1(t)\varphi_1^-(t) + g_1(t), \ t \in \gamma \tag{2}$$

$$\varphi_2^+(t) = G_2(t)\varphi_2^-(t) + g_2(t), \ t \in \gamma \tag{3}$$

где заданные функции $a(t)$, $h(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, H- непрерывны на соответствующих кривых-носителях, а коэффициенты $a(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$ не обращаются в нуль. Задача в такой постановке изучено П.Г. Башкаревым, А.П. Нечаемым, В.А. Чернецким.

Здесь мы проведчм исследований задач (1),(2),(3), отказавшись от этих ограничений, т.е. допуская, что функции $a(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$ в отдельных точках контура обращаются в нуль или бесконечность целых порядков. Кроме того требуем, чтобы функции $h(t),\ g_1(t), g_2(t)$ в сингулярных точках были дифференцируемы достаточное число раз.

Запишем краевые условие (1), (2), (3) в форме

$$\varphi_1^+(t)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}a^*(t)\varphi_2^-(t)+h(t),\ t\in\Gamma \tag{$1'$}$$

$$\varphi_1^+(t)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}G_1^*(t)\varphi_1^-(t)+g_1(t),\ t\in\gamma \tag{$2'$}$$

$$\varphi_2^+(t)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}G_2^*(t)\varphi_2^-(t)+g_2(t),\ t\in\gamma \tag{$3'$}$$

Здесь $\alpha_k(k=1,2,...,\mu),(j=1,2,...,\nu)$- некоторые точки контура; $m_k\ ,p_j$-целые положительные числа;

Точки α_k будут нулями функции $a(t),\ G_1(t),\ G_2(t)$. Точки β_j будут их полюсами.

Обозначим $æ_0=ind_\Gamma a^*(t),\ æ_1=ind_\gamma G_1^*(t),\ æ_2=ind_\gamma G_2(t)$, и $æ=æ_0+æ_1+æ_2$. Если свободные члены $h(t),\ g_1(t),\ g_2(t)$ тождественно равны нулю, то смешанная краевая задача $(1')$–$(3')$ называется однородной, если же хотя бы один из них не равен тождественно нулю, то смешанная краевая задача $(1')$–$(3')$ называется неоднородной. Через l обозначим число линейно-независимых решений однородной смешанной задачи, а через l'-число условий разрешимости неоднородной смешанной краевой задачи. Краевая задача называется нетеровой, если числа l и l' конечны, а разность $l-l'$ называется индексом краевой задачи.

Лемма. *Для заданных коэффициентов и свободных членов смешанной краевой задачи $(1')$–$(3')$ существуют единственный H-непрерывные на Γ функции $A(t)$ и $H(t)$ такие, что смешанная краевая задача $(1')$–$(3')$ равносильно, соответственно, однородной или неоднородной краевой задаче*

$$\Phi_1(t)=A(t)\overline{\Phi_2(t)}+H(t), t\in\Gamma,\qquad \Phi_1(t)=A(t)\overline{\Phi_2(t)}, t\in\Gamma$$

где новые неизвестные функции $\Phi_1(z),\Phi_2(z)$ аналитические в D^+ и H–непрерывны в $D^+\cup\Gamma$, коэффициент $A(t)\neq 0$ на Γ и $ind_\Gamma A(t)=æ$.

УДК 519.6

О числе эволюционной траектории систем с зависимыми элементами

Хаитов Т.И.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

Эволюционная траектория (состояние) системы:

$$A = (a_1, a_2, ...a_n),$$

генерируется следующей математической моделью (см.[1])

$$x(t+1) = x(t) + \lambda(t), \tag{1}$$

$$x(0) = (x_1(0), x_2(0), ..., x_n(0)), \tag{2}$$

где– $x(0)$ начальное условие. Состояние элемента a_i в каждый момент времени $t \in (-\infty, \infty)$ описывается периодической, линейной функцией $x_i(t) = x_i(0) - t, \quad x_i(t+T_i) = x_i(t), \quad T_i = \alpha_i + \beta_i$, где α_i– срок функционирования элемента a_i, β_i – срок его восстановления, α_i, β_i, t–целые и положительные.Если $t < 0$, то (1) и (2) генерирует траекторию прошлого состояния. В случае, когда $x_i(t), \ i = 1, 2, ..., n$ независимые, т.е. каждый элемент a_i стареет (изнашивается) независимо от состояния остальных элементов системы, число κ эволюционных траекторий (см.[2]) вычисляется по формуле:

$$\kappa = \frac{1}{T} \prod_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{T} \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i),$$

где $-T = HOK(T_1, T_2, ..., T_n)$. Эволюционная траектория представляет собой множество целочисленных точек параллелепипеда P_n:

$$P_n = \{x(t) : -\beta_i < x_i(t) \le \alpha_i, \ i = 1, 2, ..., n\},$$

через которого последовательно проходит указанная траектория. За меру длины траектории принято число целых точек, через которые проходит она. Все траектории замкнутые, не имеют точек само пересечения и имеют одну и ту же длину в указанном смысле.

В случае,когда $x_i(t), \ i = 1, 2, ..., n$, зависимые– это значит, что состояние каждого a_i определяется в зависимости от состояния остальных элементов системы, то возникает ряд специфических моментов.

Во-первых, $x_i(t)$ должны рассматриваться в функциональной зависимости:

$$x_i(t) = F(x_1(t), ..., x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), ..., x_n(t)), \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (3)$$

Во-вторых, если a_i рассматривать как элемент вне системы,то соответствующая ему $x_i(t)$ является периодической, как описано выше, но как только a_i включить в систему,из - за (3) периодичность нарушается, потому что нарушается основное свойство периодической функции $f(x+T) = f(x)$ $x_i(t)$. Для каждой $x_i(t)$ найдется несколько основных периодов вида:$T_i^{(1)}, T_i^{(2)}, ..., T - i^{(k)}$, t,для которых в разных отрезках времени t будет справедливым равенство

$$x_i(t + T_i^{(p)}) = x_i(t).$$

В - третьих, из вышесказанного следует, что каждая траектория имеет свою длину, точнее множество траекторий распадается на группы внутри которой они имеют одинаковую длину, однако между группами длины будут различаться.

Далее, было доказано, что число траекторий $\kappa(\alpha, \beta)$ не зависит от параметра β, иными словами число эволюционных траекторий зависит только от сроков функционирования элементов a_i и не зависит от сроков восстановления изношенных элементов.

На основание вышеизложенных результатов получена формула подсчета траекторий для систем с зависимыми элементами.

$$\kappa(\alpha) = \frac{1}{T} \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1),$$

где $-T = HOK(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, ..., \alpha_n + 1)$

Литература

1. Хаитов Т.И. Моделирование эволюции коллекции с не автономными элементами. ДАН РТ, 2000г,т.XLIII,No3,с.89 - 94.

2. Усманов З.Д., Хаитов Т.И. Программирование состояний коллекций. М.: Наука, 1983,216с.

УДК 511.

К теории краевых задач для многомерных эллиптических систем

Халилов Ш.Б.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

Как известно, для многомерных эллиптических по И. Г. Петровскому системы уравнений в частных производных второго порядка классические граничные задачи поставлены не всегда корректно. Примером этого послужить система [1]

$$-\triangle u_j + 2\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad j = \overline{1,n},$$

задача Дирихле, которая в полупространстве не является нетеровой, и в шаре имеет единственное решение,но для разрешимости этой задачи требуется повышенное гладкости краевых условии.

В данной работе рассматривается система уравнении в частных производных второго порядка

$$-Lu_j + \lambda_j\left(\sum_{i=1}^{n} l_i(u_i)\right) = f_j(x), \quad j = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где

$$L(\cdot) = \sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}l_k(\cdot),$$

$$l_i(\cdot) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(X)\frac{\partial\cdot}{\partial x_k}, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\lambda_j(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}(X)\frac{\partial\cdot}{\partial x_i}, \quad j = \overline{1,n},$$

$a_{ik}(x), \;\; \lambda_{jk}(x) \in C^{1,\alpha}(D_1), \;\; f_j(x) \in C^{0,\alpha}(D_1), \;\; i,k,j = \overline{1,n}, \;\; 0 < \alpha < 1$ и $\lambda_{jk} = -\lambda_{kj}$, когда $k \neq j, \;\; \lambda_{11} = \lambda_{22} = \cdots = \lambda_{nn} = \lambda(x)$.

Здесь дополнительно требуется, что произведение матрица коэффициентов оператора L с матрицой

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ -\lambda_{12} & 0 & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ -\lambda_{1n} & -\lambda_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

являются коммутативным,т.е. $A\Lambda = \Lambda A$. При этих условиях характеристический определитель системы (1) принимает вид

$$\sigma(\xi) = (1 - \lambda(x))L^n(\xi).$$

Из положительно - определенности квадратической формы $L(\xi)$ следует, что система (1) при $\lambda(x) - 1 \neq 0$ является эллиптической по Петровскому.

Задачу Дирихле для системы (1) рассматриваем в следующей постановке:

Задача:*Пусть D_1 ограниченная область евклидово пространство R^n, и пусть $\bar{D} = D \bigcup S$ замкнутая область целиком содержащиеся со своей границей в области D_1. Найти регулярные в области D решения $u_1, u_2, \cdots, u_n$ системы уравнения (1)удовлетворяющее на границе S области D краевым условиям*

$$u_j \Big|_S = g_j(x), \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где $u_j \in C^{0,1}(S), \quad j = \overline{1,n}$.

Следует отметит, что здесь под регулярным решением понимается дважды непрерывно дифференцируемые в области D решения системы (1).

Рассматриваемая задача с помощью классического метода параметрикса (функция Леви) сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма распространенной по замкнутой области $\overline{D}$ и одного сингулярного интегрального уравнения распространенное по границе области D поверхности S.

Результатом этой работы являются следующая

Теорема.*Задача Дирихле (2) для системы (1) при $\Theta_1 \bigcap \bar{D} = \oslash$, $\Theta_2 \bigcap S = \oslash$ всегда фредгольмова, а при $\Theta_1 \bigcap \bar{D} \neq \oslash$, $\Theta_2 \bigcap S \neq \oslash$ нарушается фредгольмовость поставленной задачи.*

Литература

1.Янушаускас А.И. Задача о наклонной производной теории потенциала. Новосибирск: Наука, СО, 1985. 262с.

УДК 511.

Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой

Ш.А. Хайруллоев
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

Б. Риман [1] высказал гипотезу, что все нетривиальные нули функции $\zeta(s)$, лежат на “*критической прямой*” $Re\, s = \sigma = 0,5$. Эта гипотеза до сих пор не доказана. Первым результатом, связанным с нулями $\zeta(s)$ на критической прямой, явилась теорема Г.Харди (см. [2]), который доказал бесконечность количества таких нулей. Затем Г.Харди и Д.Литтлвуд [3] доказали следующую утверждению:

Теорема A$_1$. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$ такое, что при $T \geq T_0$, $H \geq T^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$ промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$.*

Новую важную результат в этой проблеме получил в 1976 г. чешский математик Ян Мозер [4]). Он доказал :

Теорема A$_2$. *При $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{1/6}\ln^6 T$ промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta\left(1/2+it\right)$.*

А.А. Карацуба [5] в 1981г. доказал следующую теорему которая улучшает теорему A$_2$.

Теорема A$_3$. *При $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{5\backslash 32}\ln^2 T$ промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$.*

Изучение нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$ на критической прямой сводится к изучению вещественных нулей функции Харди $Z(t)$.

Определение. *Функция Харди $Z(t)$ задается равенством*

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right),$$

$$e^{i\theta(t)} = \pi^{-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|^{-1}.$$

Функция Харди $Z(t)$ принимает вещественные значение при вещественных значениях t и вещественные нули $Z(t)$ являются нулями $\zeta(s)$ лежащими на критической прямой.

В этой работе нам удалось свести задачу о величине промежутка $(T, T+H)$ критического прямой в котором, содержится нуль нечетного порядка дзета–функции к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальных тригонометрических сумм., а именно как показано в [5] выбор H полностью зависит от оценки суммы

$$V_1 = \sum_{0,5M<m\leq 0,5M_1} exp(2\pi f(m)),$$

$$f(m) = \alpha_1(2m) + \alpha_2(2m)^2 + t_1 \cdot \left(\frac{(2m)^3}{3P_1^3} + \frac{(2m)^4}{4P_1^4} + ...\right)$$

$$\alpha_1 = (2\theta P_1 + \theta^2)P_1^{-1}, \quad \alpha_2 = (2\theta P_1 + \theta^2)P_1^{-2}, \quad t_1 = \frac{t}{2\pi};$$

Сумма $V_1(t)$ с помощью варианты теоремы Харди–Литтлвуда–Виноградова–Корпута заменяется на более короткую сумму, которая в свою очередь оценивается с помощью метода экспоненциальных пар.

Определение. *Если* $B \geq 1$, $0 < h \leq B$, $f(u) \in C^\infty(B, 2B)$, $A \geq 1$,

$$AB^{i-r} \ll |f^{(r)}(u)| \ll AB^{i-r},\ r = 1, 2, 3, \cdots,$$

где постоянная под знаком $\ll$ *зависит только от r, и имеет место оценка*

$$\sum_{B\leq n\leq B+h} e(f(n)) \ll A^k B^\lambda, \quad 0 \leq k \leq 0,5 \quad 0,5 \leq \lambda \leq 1,$$

то пара $(k;\lambda)$ *называется экспоненциальной парой.*

Тривиальная оценка показывает, что (0,1) является экспоненциальной парой. E. Phillips [6] показал, что если $(k;\lambda)$ экспоненциальная пара, то

$$A(k;\lambda) = \left(\frac{k}{2k+2}, \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2k+2}\right) \qquad (A - \text{процесс})$$

$$B(k;\lambda) = (\lambda - 0.5, \quad k + 0.5) \qquad (B - \text{ процесс})$$

также являются экспоненциальными парами.

Теорема A $_4$**.** *Пусть* (k, λ) *– произвольная экспоненциальная пара,* $T \geq T_0 > 0$,

$$H \geq T^{\theta(k;\lambda)} \ln T, \qquad \theta(k;\lambda) = \frac{1}{2}\left(1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{0,5-k}{\lambda}}\right).$$

Тогда промежуток $(T, T+H)$ *содержит нуль нечетного порядка функции* $Z(t)$.

Заметим, что теорема A_3 является следствием теоремы A_4, при

$$(k,\lambda)=\left(\frac{1}{11},\frac{11}{14}\right)=ABAA(0,1)$$

Литература

1. Риман Б. О числе простых чисел, не превышающих данной величини.// Сочинения. М.:ОГИЗ, 1948–с.216–224.
2. Hardy G.H. Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Compt.Rend.Acad.Sci–1914.–v.158.–P.1012–1014.
3. Hardy G.H., Littlewood J.E. Contributions to the theory of Riemann zeta–function and the theory of distribution of primes //Asta Math, –1918.–v.41.–P.119–196.
4. Мозер Я. Об одной теореме Харди–Литтлвуда в теории дзета – функции Римана.//Acta Auith.–1976.–V. 31.–P. 45–51; Добавление// Acta Auith.–1979.–V. 35.–P. 403–404.
5. Карацуба А.А. О расстоянии между соседними нулями дзета–функции Римана, лежащих на критической прямой.//ТрудыМИАН.1981.–т. 157.С.49–63.
6. Phillips E. The zeta fucntion of Riemann: further developments of van der Corput's method.// Quart. J. Math. (Oxfort), 1933, v. 4, 205–225.

УДК 511.

Нули дзета функция Римана в коротких промежутках в критической прямой

Хасанов З.Н.
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

В 1921 Г.Харди и Д.Литтлвуд [1] доказали теорему согласно которого для любого $\varepsilon>0$ существуют $T_0=T_0(\varepsilon)>0$, $c=c(\varepsilon)>0$ такие, что при $T\geq T_0$, $H=T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ справедливо неравенство:

$$N_0(T+H)-N_0\geq cH.$$

В 1942г. А.Сельберг [2] доказал усиленный вариант этой теоремы. Он показал, что при выполнение вышеуказанных условий

$$N_0(T+H)-N_0\geq cH\ln T.$$

Из формулы Мангольдта (1) о количестве $N(T)$ нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 \leq Re\, s \leq 1$, $0 \leq Im\, s \leq T$

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(T),$$

следует неулучшаемость результата А.Сельберга.

В связи с оценкой (2) А.Сельберг[2] высказал гипотезу о том, что (2) имеет место и при меньших H, например, при $H = T^{a+\varepsilon}$, где a–фиксированное положительное число, меньшее ${}^1\!/_2$.

Эту гипотезу А.Сельберга решил А.А. Карацуба[3–5]. Он доказал:

Теорема 1. *Пусть ε – произвольное положительное число, не превосходящее $0,001$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27\backslash 82+\varepsilon}$. Тогда существует положительная постоянная $c = c(\varepsilon)$ такая, что*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq cH\ln T.$$

А.А.Карацуба своих работах[3–5] сделал замечание, что в теореме число $\frac{27}{82} = \frac{1}{3} - \frac{1}{246}$ может быт заменено меньшем число, но это связано с исключительно громоздкими оценками специального вида тригонометрический сумм.

Решение поставленных задач А.А. Карацубы — оценок специальных тригонометрических сумм через теории экспоненциальных пар является основным результатом настоящей работы.

Задачу о количество нулей дзета функции Римана в коротких промежутках критической прямой удалось нам свести к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки тригонометрический сумм.

Определение. *Если $B \geq 1$, $0 < h \leq B$, $f(u) \in C^{\infty}(B, 2B)$, $A \geq 1$,*

$$AB^{i-r} \ll |f^{(r)}(u)| \ll AB^{i-r},\ r = 1, 2, 3, \cdots,$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от r, и имеет место оценка

$$\sum_{B \leq n \leq B+h} e(f(n)) \ll A^k B^{\lambda}, \quad 0 \leq k \leq 0,5 \quad 0,5 \leq \lambda \leq 1,$$

то пара $(k;\lambda)$ называется экспоненциальной парой.

Тривиальная оценка показывает, что (0,1)является экспоненциальной парой. E. Phillips [6] показал, что если $(k;\lambda)$экспоненциальная пара, то

$$A(k;\lambda) = \left(\frac{k}{2k+2}, \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2k+2}\right) \qquad (A - \text{процесс})$$

$$B(k;\lambda) = (\lambda - 0.5, \quad k + 0.5) \qquad (B - \text{ процесс})$$

также являются экспоненциальными парами.

Теорема 2. *Пусть* (k, λ) *– произвольная экспоненциальная пара,* $\theta(k;\lambda) = \dfrac{k+\lambda}{2(k+1)}$, ε *- произвольное положительное число, не превосходящее* 0.001, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{\theta(k;\lambda)+\varepsilon}$. *Тогда существует положительная постоянная* $c = c(\varepsilon)$ *такая, что*

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq cH \ln T.$$

Из работ [7–8] следует, что $\theta_0 = \min_{k,\lambda} \theta(k, \lambda) = \min_{k,\lambda} \frac{k+\lambda}{2k+2} \leq \frac{7}{22} = \frac{1}{3} - \frac{1}{66}$. Отсюда из теоремы 2 получаем.

Следствие. *Пусть* ε *- произвольное положительное число, не превосходящее* 0.001, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{7/22+\varepsilon}$. *Тогда существует положительная постоянная* $c = c(\varepsilon)$ *такая, что*

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq cH \ln T.$$

При доказательстве основной теореме мы существенно пользуемся методами работ А.А.Карацубы [3-5], в которых соответственно, доказаны гипотезы Сельберга о нулях дзета функции Римана на критической прямой и в ее окрестности, и работой З.Х. Рахмонова [9] в котором доказана плотностная теорема для нулей дзета функции Римана в коротких прямоугольниках критической полосы.

Литература

1. Hardy G.H.,Littlewood J.E. //Asta Math, –1918.–v.41.–P.119–196.
2. Hardy G.H., Littlewood J.E. //Math.Z.–1921.–Bd 10.–S.283–317.
3. Карацуба А.А. //ТрудыМИАН.1981.–т. 157.С.49–63.
4. Карацуба А.А. –Изв. АН СССР, сер. матем. 1984, т. 49, №2, с. 326–383.
5. С.М.Воронин,А.А.Карацуба –М.:Физматлит,1994.–376с.–ISBN 5–02–014120–8.
6. Phillips E. Quart. J. Math. (Oxfort), 1933, v. 4, 205–225.
7. Graham S.W. Kolesnik G. Cambridge university press. 1991, Cambridge, New Vork, Port Chester, Melbourne,Sydney.
8. Iwaniec H and Mozzochi I.–J. Number Theory 29 (1988), 60–93.
9. Рахмонов З.Х. УМН, 1994, т. 49, вып. 1, стр. 161-162.

УДК 517.51

О теореме вложения одного класса почти-периодических функций

Хасанов Ю.Х.
(РТСУ)

Пуст $f(x)$ почти-периодическая функция, принадлежащая $B_p(p \geq 1)$ – пространству Безиковича, т.е. $|f(x)|^p$ интегрируема на любом конечном отрезке,

$$D_{B_\rho}\{f(x)\} = \left\{\overline{\lim \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} |f(x)|^p\,dx,}\right\}^{1/p} < \infty$$

и существует последовательность тригонометрических сумм $\{P_n(x)\}$, $P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k e^{i\lambda_k x}$, для которой

$$\lim D_{B_p}\{f(x) - P_n(x)\} = 0.$$

Пусть $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x}$ – тригонометрический ряд, в котором $\lambda_0 = 0,\ \lambda_{-k} = -\lambda_k,\ \lambda_k < \lambda_{k+1},\ (k = 0, 1, 2, ...)$,

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty, |A_k| + |A_{-k}| \neq 0. \tag{1}$$

Положим

$$E_\Lambda(f)_{B_p} = \inf_{C_k} D_{B_p}\left\{f(x) - \sum_{|C_k|<\Lambda} C_k e^{i\lambda_k x}\right\} \tag{2}$$

Ниже приводится теорема о вложении классов B_p в B_q $(p < q < \infty)$, являющаяся аналогом теоремы П.Л.Ульянова [1] для периодических функций.

Теорема. Пусть $f(x) \in B_p$ и $\{P_n(x)\} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{n} C_k e^{i\lambda_k x}\right\}$ последовательность тригонометрических сумм, где числа $\{\lambda_k\}$ удовлетворяет условиям (1).
Если для некоторого $q(p < q < \infty)$

$$\sigma(f; p; q) = \sum n^{\frac{q}{p}-2} E^q_{n-1}(f)_{B_p} < \infty, \tag{3}$$

то $f(x) \in B_q$ и справедливо неравенство

$$D_{B_\rho}\{f(x)\} \le M_{p,q}\{|A_0| + \sigma(f;p;q)\},$$

где $E(f)_{B_p}$ определено в (2) $A_0 = \overline{\lim\limits_{T\to\infty}} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f(x)dx$. Условие (3) вложения классов B_ρ в B_q является окончательным и это вытекает из следующего утверждения.

Пусть $M_p(a_n)$ означает класс функций, принадлежащих к B_p, для которых $E(f)_{B_p} \le a_n$ $(n = 1, 2, ...)$, где a_n– произвольная монотонно убывающая к нулю последовательность чисел. Тогда, если $\sum n^{\frac{q}{p}-2} a_n$ расходится, то функция $f_0(x)$ имеющая ряд Фурье $\frac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cos\lambda_n x$, где $A_n = \left\{\sum (k-n+1)(a_k^p - a_{k+1}^p)/(k+1)^p\right\}^{1/p}$принадлежит классу $M_p(a_n)$, но не принадлежит к $B_q(q > p)$.

Литература

1. Ульянов П.Л. Вложение некоторых классов функции H_p^α // Известия АН СССР, серия математика 1968, т.32, с.649-686.

УДК 511.

Адаптивный алгоритм статистической оптимизации процесса электролиза алюминия

А. Халиков
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

Характеризуя процесс электролиза алюминия как объект управления, следует отметить, что выход металла по току зависит от большего числа технологических параметров, отличающихся друг от друга как по физической сущности, так и по законам изменения. К таким параметрам относятся: сила тока серии, падение напряжения на электролизере, температура электролита, межполюсное расстояние, уровни металла и электролита, составы электролита и анодних газов, анодные эффекты, магнитные поля, форма рабочего пространства электролизера, физические свойства электролита и целый ряд других факторов.

При автоматическом управлении необходимо установить связь между параметрами объекта и выбрать те управления, которые в максимальной степени удовлетворяют задачам оптимизации. С этой целью задача сводится к оптимизации целевой функции электролизера

$$\eta(Y, U, V, F) \rightarrow extr\eta \tag{1}$$

где Y-вектор выходных переменных, U-вектор управляющих воздействий , V - вектор контролируемых возмущающих воздействий, F- вектор неконтролируемых возмущаюших воздействий.

Область допустимых технологических ограничений D и выходных переменных Ω являются замкнутыми:

$$U \in D, \quad Y \in \Omega \tag{2}$$

Функционал (1) в явном виде отсутствует. Однако, в основе экспериментальных методов поиска лежит предположение, что эта функция, характеризующая зависимость η от управляющих воздействии, может аппроксимированная полиномом k–той степени. Этот полином является разложением в ряд Тейлора функции показателя качества по степеням управляющих воздействии в окрестности рабочей точки:

$$\begin{aligned} &\eta = \eta(I_c U_Э, L, T_p, H_м, H_Э) = \eta_0 + \tfrac{\partial \eta_c}{\partial I_c} I_c + \tfrac{\partial^2 \eta}{\partial I_c \partial U_Э} I_c U_Э + \tfrac{\partial^2 \eta}{\partial I_c^2} I_c^2 + \ldots = \\ &= a_0 + a_1 I_c + c_1 I_c U_Э + b_1 I_c^2 + \ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

где η - выход металла по току в кг или % ; I_c- сила тока серии, кА; $U_Э$ - падение напряжения на электролизере, В;L- межполюсное расстояние, мм; $H_м$-уровень металла, мм; $H_Э$-уровень электролита, мм; a_0, a_1, b_1, c_1– коэффициенты разложения функций в ряд Тейлора. В практике, как правило, ограни читаются тремя членами ряда (4)

$$\eta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i X_i + \sum_{i=1}^{n} b_i X_i^2 + \sum_{i \neq j}^{n} c_{ij} X_i X_j \tag{4}$$

где $\underline{x_1} = I_c$; $X_2 = U_Э$; $X_3 = L$; $X_4 = H_M$; $X_5 = H_Э$ и.т.д.; $i = \overline{1, n}$ - число управляющих воздействий.

Если приближение (4) с высокой степенью точности аппроксимирует действительное состояние электролизера, то величины коэффициентов a_i, c_{ij}, b_i не зависят от положения рабочей точки. Кроме того, возможны различные комбинации экспериментальных данных, классов моделей, критериев качества и вычислительных методов. Все это позволяет поставить задачу оценки параметров модели, как задачу оптимизации. При этом наилучшей моделью будет та, которая лучше всего аппроксимирует экспериментальные данные в смысле выбранного критерия качества.

В связи с этим, используется идея метода оптимизации менее хорошо определенных процессов, когда сам процесс, его ограничения и внешние факторы подвержены изменениям. Адаптация модели (4) по отношению к погрешностям измерений проводится следующим образом: значения I_c, $U_Э$, $T_Э$, L, H_m , $H_Э$ и фактическое значение целевой функции $\eta_{ф}$ в моменты времени t_{p-q+1}, $t_{p-q+2}, \dots$, t_p вводится в памяти ЭВМ.

В памяти ЭВМ хранятся q последних совокупностей значений величин. Иными словами, данные непрерывно обновляется путем вычеркивания последней строки, сдвига строк и обновления первой. Если модель (3) адекватно описывает целевую функцию электролизера, может быть сделано на основе сравнения фактического значения функции цели $\eta_{ф}$ и ее предсказанного значения $\eta_{п}$. Процесс электролиза алюминия момент рассматриваться на адекватно оптимизируемый, если для некоторого положительного Δ выполняется условие

$$\Delta \geq |\eta_{ф}^{p} - \eta_{П}p|; \tag{5}$$

и при этом модель может не корректироваться

Если же

$$\Delta < |\eta_{ф}^{p} - \eta_{П}p|; \tag{6}$$

то процесс электролиза алюминия может рассматриваться как плохо оптимизируемый.

Выражение (1) является математической моделью экстремального объекта управления (без учета его инерционных свойств). Тогда из модели (4) оптимальные значения управляющих воздействий, соответствующие положению экстремума, будут определены как

$$\frac{\partial \eta}{\partial X_i} \approx a_i + 2b_i X_i + \sum_{j \neq i}^{n} c_{ij} X_j = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{7}$$

Поэтому работа по экстремальной системе состоит из двух этапов. На первом этапе из модели (4), с учета принятым ограничениям определяются значения коэффициентов a_i, b_i, c_{ij}. На втором этапе по найденным значениям этих коэффициентов с помощью систем уравнений (4), определяют оптимальные значения управляющих воздействий.

Литература

1. Основы металлургии том VI. М: Металлургия, 1973, с. 410-454

2. В.К.Горнов и др. оптимизация работы мощных электрометаллургических установок. М: Металлургия, 1981, с.310

УДК 517.95

Интегральные представления решении для одной переопределенной системы со сверхсингулярными коэффициентами

Шамсудинов Ф. М.
(Кург.ГУ, Курган- Тюбе, Таджикистан)

Через D обозначим прямоугольник $\{(x,y): -c < x < c, 0 < y < d\}$. Далее, обозначим

$$\begin{aligned}&\Gamma_1 = \{y = 0, -c < x < c\}, \quad \Gamma_2 = \{x = 0, 0 < y < d\},\\ &\Gamma_1^1 = \{y = 0,\ -c < x < 0\}, \quad \Gamma_1^2 = \{y = 0, 0 < x < c\},\\ &D_1 = \{(x,y):\ -c < x < 0,\ 0 < y < d\},\\ &D_2 = \{(x,y):\ 0 < x < c,\ 0 < y < d\}, \quad D_0 = D_1 \cup D_2,\\ &D = D_0 \backslash \Gamma_2.\end{aligned}$$

В области D рассмотрим систему

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_j(x,y)}{r^{\alpha_j}}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_j(x,y)}{r^{\beta_j}}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_j(x,y)}{r^{\alpha_j+\beta_j}}u = \frac{f_j(x,y)}{r^{\alpha_j+\beta_j}}, \tag{1}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $a_j(x,y)$, $b_j(x,y)$, $c_j(x,y)$, $f_j(x,y)$ $j = 1,2-$ заданные функции области D $,\alpha_j > 2$ $\beta_j = 2$, $j = 1,2$ (α_j-целые числа).

Исследованию дифференциальные уравнении и переопределенных систем уравнений с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами посвящены работы [1] – [5].

В настоящей работы на основе способа разработанного в [3], получено представление многообразия решений системы (1) через две произвольные постоянные.

В дальнейшем через $C_2(D)$ обозначим класс функций, которые имеют непрерывные производные первого порядка в D и такие ,что $u_{xy} \in$ C(D).

Теорема 1. *Пусть в системе уравнений (1)* $\alpha_j > 2$ $\beta_j = 2$, $j = 1,2$ *коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям:*

1) $a_1(x,y) \in C_x^1(D)$, $b_1(x,y)$, $c_1(x,y)$, $f_1(x,y) \in C(D)$,

$$b_2(x,y) \in C_y^1(D), a_2(x,y), {}_2(x,y), f_2(x,y) \in C(D);$$

2) $c_1(x,y) = r^{\alpha_1+2}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{a_1(x,y)}{r^{\alpha_1}}) + a_1(x,y) \cdot b_1(x,y)$,

$$c_2(x,y) = r^{\alpha_1+2}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{b_2(x,y)}{r^2}) + a_2(x,y)\cdot b_2(x,y);$$

3) $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{a_1(x,y)}{r^{\alpha_1}}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{b_2(x,y)}{r^2})$ *в* D *;*

4) $|a_1(x,y) - a_1(\mp 0,0)| \le H_i r^{\alpha_i}, H_i = const, \alpha_i > \alpha_1 - 1, i = 3,4,$
$|b_1(x,y) - b_1(\mp 0,0)| \le H r^{\beta}, H = const, \beta > 1, \ = 3,4,$
$|b_2(x,y) - b_2(\mp 0,0)| \le \mathrm{H}_s r^{\gamma_s}, H_s = const, \gamma_s > 1, S = 5,6,$
$|b_2(x,0) - b_2(\mp 0,0)| \le H_\mu x^{\nu}, H_\mu = const, \gamma > 1, \mu = 1,2;$

5) $a_1(\mp 0,0) < 0,\ b_1(\mp 0,0) > 0$*;*

6) $\tilde{f}_1(x,y) = \tilde{f}_1(x,y)\cdot\exp\left[\frac{b_1(\mp 0,0)}{y} arctg\frac{y}{x}\right] = 0(r^{\gamma_{\nu_1}}) = o(r^{\lambda_\mu}), \gamma_{\nu_1} > \alpha_1 + 1, \nu_1 = 1,2;$

7) *функции* $f_1(x,y)$ *и* $f_2(x,y)$ *связаны при помощи коэффициентов системы в явном виде;*

8) $\tilde{F}_1^{\mp}(x) = F_1 \mp (x)\cdot\exp[-b_2(\mp 0,0)\omega_1(x)] = 0(x^{\mu_\lambda}), \quad \mu_\lambda > 1, \ \ \lambda = 1,2$

Тогда любое решение системы (1) из класса $C_2\,(D)$ *представимо в виде*

$$U(x,y) = \begin{cases} K_{11}^{1,-}(\varphi_1^-(x),\, \psi_1^-(y),\ \ f_1(x,y)),\ \textit{при}\ \ -c < x < 0, \\ K_{1,2}^{1,+}(\varphi_1^+(x),\, \psi_1^+(y),\ \ f_1(x,y)),\ \textit{при}\ \ 0 < x < c, \\ \end{cases}$$

$$\varphi_1^{\mp}(x) = (C^{\mp}, F_1^{\mp}(x,y)), \quad \psi_1^{\mp}(y) = G^{\mp}(y),$$

где $K_{12}^{1,+}(\varphi_1^+(x),\, \psi_1^+(y),\ \ f_1(x,y))$, $K_{11}^{1,-}(\varphi_1^-(x),\ psi_1^-(y),\ f_1(x,y))$, $M(_1^{\mp},\ F_1^{\mp}(x,0))$, $G^{\mp}(y), F_1^{\mp}(x)$ *известные интегральные операторы, выражающееся через коэффициенты и правые части,* $c_1^{\pm}$, $c-$ *произвольные постоянные числа соответственно в областях* D_1 *и* D_2*.*

Полученное решение имеет следующие свойства

$$\lim_{y\to 0}\{\ \exp\left[a_1(\mp 0,0)\omega^{(1),\mp}_{\frac{\alpha_1}{2}-1}(x,y)\right]\cdot u(x,y)\ \} = \varphi_1^{\mp}(x),$$

$$\lim_{x\to\mp 0}\left\{\exp[-b_2(\mp 0,0)\omega_1(x)]\lim_{y\to 0}\exp\left[\alpha_1(\mp 0,0)\omega^{(1),+}_{\frac{\alpha_1}{2}-1}(x,y)\cdot u(x,y)\right]\right\} = c_1^{\mp}$$

$$U(x,y) = O(\exp[-\alpha_1(\mp 0,0)\omega^{(1),-}_{\frac{\alpha_1}{2}-1}(x,y)]\ ), \qquad \text{при} \qquad x\to\mp 0.$$

Литература

1.Михайлов Л.Г.Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями.Душанбе,1986.-115с.
2.Раджабов Н.В ведение в теорию дифференциальных уравнений в частных уравнений со сверх сингулярными коэффициентами.Душанбе, Изд.ТГУ,1992.-236с.
3.Раджабов Н., Мирзоев Н.- Вестник национального университета, серия математика, Душанбе 2004, №1,с.84-101.
4.Раджабов Н. Об одном классе переопределенной системы первого порядка с внутренними сингулярными и сверхсингулярными многообразиями //Материалы международной научной конференции. Душанбе 8-10 ноября 2005 г.-с.149-152.
5. Шамсуддинов Ф.М. Об одной переопределенной системе второго порядка со сверхсингулярной точкой // Материалы международной научной конференции. –Казань : Издательство Казанского математического общества, 2004,с.109-110.

УДК 410:31+4147+943.75+811.222.8

Муқоисаи вариантҳои тоҷикӣ ва ӯзбекии романи Ғуломони С. Айнӣ

Шарипов Ш.А.
(Донишгоҳи технологии Тоҷикистон, ш.Душанбе)

Дар мақола таҳлили оморӣ ва муқоисаи баъзе омилҳои романҳои "Ғуломон"[1] ва "Қуллар" [2]-и устод С.Айнӣ баррасӣ шудааст. Бо-иси қайд аст, ки романҳо тарҷумаи якдигар набуда, як фикр дар алоҳидагӣ бо истифодаи ду забон баён шудааст. Ҳангоми коркард матни ҷудокардашуда дар асоси усули дар [3] пешниҳодшуда ба қисмҳо ҷудо карда шуд.

1. Барои таҳлили оморӣ 250 саҳифа аввали романҳои "Қуллар"ва "Ғуломон" истифода шудааст, ки мувофиқан дорои 319933 ва 372801 ҳарф буда, ба ҳар саҳифаи матн ба ҳисоб миёна 1778 ва 1837 ҳарф рост меояд.

Аз 10 саҳифа иборат будани намояндагии матнҳои забонҳои тоҷикӣ ва ӯзбекӣ дар [3,4] исбот шудааст. Дар натиҷаи коркарди басомади ҳарфҳои алифбо тақсимоти омории D_k пайдо карда, миёнаи омории $D_{\text{миёна}}$ ҳисоб карда шуд.

2. Басомади ҳарфҳо нишон медиҳанд, ки миқдори ҳарфҳои 50% -и мантро ишғолкунанда дар романи "Ғуломон" "а", "и", "н", "р", "л"

ва "о" мебошанд. Аз ин номгӯй маълум мешавад, ки дар калимасозии забони тоҷикӣ ва ӯзбекӣ ҳарфҳои "а", "о", "р", "и" хеле зиёд вомехӯранд. Қисми матн, ки 80%, 90% ва 95% -и матни коркардашавандаро дарбар мегирад, мувофиқан барои матни тоҷикӣ 13, 18, 22 ҳарф ва барои матни ӯзбекӣ 14, 19, 23 ҳарфро ташкил медиҳанд.

Ҳарфҳои хоси тоҷикӣ танҳо 4, 42%-ро ташкил дода, ба ҳисоби миёна 2, 3% матнро дар бар мегиранд.

Ҳарфҳои хоси ӯзбекӣ "қ", "ӯ", "ҳ", "ғ" 5, 02%-ро ташкил дода, ба ҳисоби миёна 1, 52% тамоми матнро дарбар мегиранд.

Ҳарфҳое, ки хоси тоҷикӣ ва ӯзбекӣ нестанд ("ц", "щ", "ы", ва "ь") мувофиқан 1,21 ва 1, 07%-и матнро дарбар мегиранд.

3. Басомади дуҳарфаҳои ҳар ду роман, ки 50% - и матнро ишғол мекунанд, қариб ба ҳамдигар баробар буда, мувофиқан 440 ва 410 тогӣ мебошанд.

4. Басомади ҳиҷоҳо низ наздикии имлои ду забонро нишон медиҳад. Дар забони тоҷикӣ тақрибан 2044 [5] ва дар забони ӯзбекӣ 2156 [4] ҳиҷо муайян карда шудааст. Дар қисми таҳлилшудаи романҳо мувофиқан 1723 ва 1934 ҳиҷо истифода шудааст, ки 84, 3% ва 89, 7%-и тамоми ҳиҷоҳои тоҷикию ӯзбекиро ташкил медиҳанд.

5. Муқоисаи теъдоди калимаҳои дар романҳо вохӯранда имконияти муайян кардани баҳодиҳии наздикии ду забонро медиҳад. Калимаҳо бо шакли аслиашон муқоиса шудаанд. Агар муқоисаи калимаҳо аз рӯи решаи онҳо гузаронида мешуд, баҳодиҳӣ боз дақиқтар мешуд. Бо ин мақсад барномаи таҳлили морфологии ҷудо кардани решаи калимаҳои тоҷикию ӯзбекӣ лозим аст. Дар таркиби матни тоҷикӣ 44% калимаҳои ӯзбекӣ - туркӣ истифода шуда, дар таркиби матни ӯзбекӣ 57% калимаҳои тоҷикӣ мавҷуданд.

Нишондодҳои тақсимоти басомади ҳарфҳо дар матни романҳо бо формулаи

$$\nu = \frac{\alpha}{n^b} \tag{1}$$

тавзеҳ карда мешавад. Барои романи ”Ғуломон” қимати $a = 123,29$ ва қимати $b = -1,8448$ мебошанд. Коэффисиенти коррелятсияи қиматҳои миёнаи аз рӯи формулаи (1) ҳисобшуда,

$$r = 0,7432 \tag{2}$$

ва қимати Т- ки бо формулаи

$$T = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}} \tag{3}$$

ҳисоб карда мешавад, қимати критерияи эътимоднокии r-ро ҳангоми N=39 медиҳад, ки ба T=14,10334 баробар аст. Ин қимат аз қимати ҷадвалии тақсимоти критикии Стюдент барои $\alpha = 0,001$ ва $k = N - 2 = 37$, ки ба $t(\alpha, k) = 3,617$ баробар аст, хеле калон мебошад. Дар навбати худ, ин омилҳо мавҷуд будани алоқамандии зич байни қиматҳои назариявӣ ва таҷрибавии тақсимшавии ҳарфҳоро эътироф мекунад.

Ин нишондиҳандаҳо барои романи "Қуллар" чунинанд:
$\alpha = 34,502$, $b = 1,3846$, $r = 0,8435$, $T = 29,0527$, $N = 37$, $k = 35$ ва $t(\alpha, k) = 3,6$.

Барномаи таҳлили оморӣ дар забони барномасозии Visual Basic 6.0. сохта шуда, дақиқ кор мекунад. Инчунин, барои ҳисобҳои оморӣ функсияҳои стандартии Ms Excel низ истифода шудаанд.

Адабиёт:

1. Айнӣ С. Ғуломон, Душанбе, 1966, с. 656.

2. Айний С. Асарлар, т.3, Ташкент, 1964, с. 472.

3. Усманов З.Д., Шарипов Ш.А. О статистических инвариантах узбекского литературного языка. //ДАН РТ, т.49, №1, с.10-13, 2006.

4. Шарипов Ш.А. О слоговом многообразии узбекского и таджикского языков.//Электронный журнал “Наука, технологии и интеллектуальная собственность Таджикистана”: www.science.tj

5. Усманов З.Д., Абдухамидов А.А., Исмаилов М.А. Статистические закономерности слогового состава таджикского языка. //ДАН РТ, т.45, №5-6, с.9-14, 2002.

УДК 517.5

О принципе симметрии Римана - Шварца

Ширинбеков М.
(Таджикский государственный национальный университет, г.Душанбе)

Известная теорема Г. Шварца гласит: если функция $f(z)$ комформно отображает область D_1 плоскости комплексного переменного z в область D_2, переводящую аналитическую дугу Γ_1 границы области D_1 в аналитическую же дугу Γ_2 границы области D_2, то $f(z)$ допускает аналитическое продолжение из D_1 в точек дуги Γ_1.

В докладе рассматривается вопрос о получение подобного результата в случае, когда Γ_2 является жордановой дугой границы D_2, а Γ_1 аналитической дугой границы D_1.

Приведем две теоремы в этом направлении.

Теорема 1.*Пусть функция $\omega = f(z)$ комформно отображает область D_1 на область D_2 при котором подобласть G_1 области D_1, примыкающей к отрезку прямой или дуге окружности C_1 границы D_1, переходит в подобласть G_2 области D_2, примыкающей к жордановой дуге C_2 границы D_2, причем область G_1 такова, что ее симметрический отрез G_1' относительно C_1 имеет пустое пересечение с G_1. Кроме того, пусть функция $\varphi(w)$ непрерывна на объединение $C_2 + G_2$ и голоморфна на G_2. Тогда эквивалентна утверждения:*

1) $\varphi(w)$ антиголоморфно продолжается с C_2 в G_2;

2) $\varphi[f(z)]$ голоморфно продолжается через C_1 из G_1 в G_1' - области, симметричной с G_1 относительно дуги C_1.

Следствие 1.*Пусть имеет место первое предложение в формулировке теоремы 1. Тогда: для того, чтобы $f(z)$ голоморфно продолжалась через C_1 из G_1 в G_1' (см., Теорему 1), необходимо и достаточно, чтобы функция ω антиголоморфно продолжалась с C_2 в G_2.*

Если в следствие 1 в качестве C_2 взять дугу окружности или отрезок прямой, то получим классический принцип симметрии Римана - Шварца.

Теорема 2.*Пусть $f(z)$ - комформное отображение области D_1 на область D_2, переводящее подобласть из D_1, примыкающей к аналитической дуге C_1 границы D_1, на подобласть G_2 из D_2, примыкающей к жордановой дуге C_2 границы D_2. Кроме того, пусть $\varphi(w)$ функция, непрерывная на $C_2 + G_2$ и голоморфная в G_2. Тогда эквивалентны утверждения:*

1)$\varphi(w)$ - антианалитически (вообще неоднозначно) продолжается с дуги C_2 в некоторую подобласть области G_2,примыкающей к C_2;

2)$\varphi[f(z)]$ аналитически продолжается из G_1 в точек дуги C_1.

Следствие 2. *В предположениях и обозначениях теоремы 2, для того чтобы функция $f(z)$ аналитически продолжалась из G_1 в точек дуги C_1, необходимо и достаточно, чтобы функция ω аналитически продолжалась с жордановой дуги C_2 в некоторую подобласть области G_2, примыкающей к C_2.*

Если в следствие 2 дуги C_1 и C_2 считать аналитическими, то изнее будет следовать упомянутая в начале теорема Г. Шварца.

Имеется пример,показывающий что Теоремы 1,2 являются действительными обобщениями принципа симметрии Римана - Шварца.

УДК 517.956

Переопределенная система в частных производных второго порядка с сверхсингулярными многообразиями.

Шоимкулов Б.М.
(Таджикский государственный национальный университет, г.Душанбе)

Исследованием переопределенных систем первого и второго порядка
с сингулярными многообразиями посвящены работы.[1]-[2].

Получению многообразия решений и исследованию краевых задач для
линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа второго порядка и некоторых линейных систем первого и второго порядка с одной и двумя сверхсингулярными линиями и сверхсингулярными точками посвящена монография Н. Раджабова [2].

В настоящей работе рассматривается переопределенная система трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сверхсингулярной линией и одной сверхсингулярной точкой.

Обозначим через D прямоугольник $D = \{ (x,y) : 0 < x < a_0 , 0 < y < b_0 \}$.

Соответственно обозначим $\Gamma_1 = \{0 < x < a_0 , y = 0 \}$, $\Gamma_2 = \{ x = 0, 0 < y < b_0 \}$

В области D рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{a_1(x,y)}{x^\alpha}\frac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{f_1(x,y)}{x^\alpha} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{a_2(x,y)}{x^\beta}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{f_2(x,y)}{x^\beta}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{a_3(x,y)}{r^\gamma}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{f_3(x,y)}{r^\gamma} \end{cases} \tag{1}$$

где $a_j(x,y), f_j(x,y) (1 \le j \le 3)$- заданные функции класса $C^1(D) \cap C(\overline{D}), r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \alpha = const \succ 0, \beta = const \succ 0, \gamma = const \succ 0, u(x,y) \in C^2(D)$.

В области D найдено многообразия решений системы (1) в явном виде, когда $\alpha > 1, \beta > 1, \gamma > 1$, где решение существенно зависит от значения коэффициентов в окрестности сверхсингулярной линии и сверхсингулярной точки, а также порядок особенности α, β, γ и содержит три произвольных постоянных.

Таким образом, доказано:

Теорема. Пусть в системы (1) $\alpha > 1, \beta > 1, \gamma > 1$:

а)$a_1(x,y), f_1(x,y) \in C^1_y(\overline{D}), a_2(x,y), f_2(x,y) \in C^1(\overline{D}), a_3(x,y), f_3(x,y) \in C^1_x(\overline{D})$, (2)

б) выполнены условия совместности системы (1):

$$x^\alpha \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a_2(x,y)}{x^\beta}\right] = \frac{\partial}{\partial y}[a_1(x,y)], \tag{3}$$

$$x^{\alpha+\beta} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f_2(x,y)}{x^\beta}\right] + a_2(x,y) f_1(x,y) = x^\beta \frac{\partial}{\partial y}[f_1(x,y)] + a_1(x,y) f_2(x,y), \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f_3(x,y) + a_3(x,y) K[W(x.y)]}{r^\gamma}\right] = \frac{\partial^2}{\partial y^2}[W(x.y)], \tag{5}$$

где $K[W(x.y)]$- известный интегральный оператор.

в) функции $a_1(x,0), a_3(0,y)$- удовлетворяют условиям:

$$|a_1(x,0) - a_1(0,0)| \le H_1 x^{\gamma_1}, \gamma_1 > \alpha - 1, \tag{6}$$

$$|a_3(0,y) - a_3(0,0)| \le H_1 y^{\gamma_2}, \gamma_2 > \gamma - 1. \tag{7}$$

г) функции $f_1(x,0), f_2(x,y), f_3(0,y)$ в окрестности сингулярной точки $r = 0$ обращается в нуль, и их поведение определяются из следующих асимптотических формул

$$f_1(x,0) = o(x^{\gamma_3}), \gamma_3 > \alpha - 1, \tag{8}$$

$$f_2(x,y) = o(y^{\gamma_4}), \gamma_4 > \beta - 1, \tag{9}$$

$$f_3(0,y) = o(y^{\gamma_5}), \gamma_5 > \gamma - 1. \tag{10}$$

д)$a_1(0,0) > 0, a_3(0,0) > 0$

Тогда любое решение системы (1) из класса $C^2(D)$, представимо в виде

$$u(x,y) = \int_0^x e^{\omega_1(t.y)} \left\{ e^{\omega_2(t.0) - a_1(0.0)\omega_2^\alpha(t)} \left[c_1 + \int_0^t \frac{f_1(s,0)}{s^\alpha} e^{-\omega_2(s.0) + a_1(0.0)\omega_2^{\alpha(s)}} ds \right] + \right.$$

$$\left. + \int_0^y \frac{f_2(t,\tau)}{t^\beta} e^{-\omega_1(t,\tau)} d\tau \right\} dt + \int_0^y e^{\omega_3(0,\tau) - a_3(0.0)\omega_3^\gamma(\tau)} [c_2 +$$

$$+\int_0^\tau \frac{f_3(0,h)}{h^\gamma} e^{-\omega_3(0,h)+a_3(0.0)\omega_3^\gamma(h)} dh \Bigg] d\tau + c_3, \qquad (11)$$

где c_1 , c_2 , c_3 - произвольные постоянные,

$$\omega_1(x,y) = \int_0^y \frac{a_2(x,\tau)}{x^\beta} d\tau, \omega_2(x,0) = \int_0^x \frac{a_1(t,0)-a_1(0,0)}{t^\alpha} dt, \omega_2^\alpha(x) = \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}},$$

$$\omega_3(0,y) = \int_0^y \frac{a_3(0,\tau)-a_3(0,0)}{\tau^\gamma} d\tau, \omega_3^\gamma(y) = \frac{1}{(\gamma-1)y^{\gamma-1}},$$

Замечание. Решение вида (11) в окрестности сингулярной точки $r = 0$ не ограниченно.

Литература

1. Михайлов Л.Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. Душ. Дониш 1986г,115стр.
2.Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. Душ. Изд. ТГУ 1992г, 236стр.

УДК 532.546

Экспериментальное изучение и модельные представления одномерной фильтрации воды в естественных грунтах.

И. Юлдошев
(Институт математики АН РТ, г.Душанбе)

Модельными представлениями явления вертикального просачивания воды в целях прогноза и расчета продвижения поливных и промывных вод в почвогрунтах занимались многие исследователи [1, 4]

В данной работе предложено уравнение просачивания воды, которое используется для решения обратных задач вертикальной фильтрации при поливах и промывных земель:

Пусть в моменты времени $t_i (i = \overline{1, n})$ заданы значения суммарных расходов Q_i. Вэтом случае вкачестве исходного используем уравнение

$$V = \frac{dQ}{dt} = k \left(\frac{Q_H + Q_K + Q_i}{Q_i} \right)^{\alpha} \tag{1}$$

где $Q_i = \sum_{i=1}^{n} V_i (t_i - t_{i-1})$; $t_0 = 0$, V_i–скорость внитывания, k–коэффициент фильтрации, Q_H–расход в столбце высотой H с единичным поперечным сечением, Q_K–расход за счет капиллярного поднятия, Q_i–суммарные расходы, t_i–время, α–параметр нелинейности.

Заменяя производную ее разностным аналогом и, логарифмируя, имеем:

$$\ln \frac{Q_i - Q_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = \ln K + \alpha \ln \frac{Q_H + Q_K + Q_i}{Q_i}$$

Обозначая $X_i = \frac{Q_H + Q_K + Q_i}{Q_i}$, $Y_i = \frac{Q_i - Q_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$ и используя метод наименьших квадратов, для α и $\ln K$ получим:

$$\alpha = \frac{(n-1) \sum_{i=2}^{n} \ln Y_i \cdot \ln X_i - \sum_{i=2}^{n} \ln Y_i \sum_{i=2}^{n} \ln X_i}{(n-1) \sum_{i=2}^{n} (\ln X_i)^2 - \left(\sum_{i=2}^{n} \ln X_i \right)^2} \tag{2}$$

$$\ln K = \frac{\sum_{i=2}^{n} \ln Y_i \sum_{i=2}^{n} (\ln X_i)^2 - \left(\sum_{i=2}^{n} \ln X_i \right)^2 \sum_{i=2}^{n} \ln Y_i \ln X_i}{(n-1) \sum_{i=2}^{n} (\ln X_i)^2 - \left(\sum_{i=2}^{n} \ln X_i \right)^2} \tag{3}$$

На основе анализа серии опытов для различных грунтов по четырем объектам (Бешкентская долина на супесчанных грунтах, Яванская долина на лессовидных грунтах, Ходжентский район на каменистых почвогрунтах, Восточный Памир на грунтах малой мощности), получены соответствующие значения α и K.

Путем решения обратной задачи для многочисленных экспериментальных данных установлено, что параметр нелинейности α для указанных районов действительно отличен от единицы, причем это отличие может быть значительным, что является подтверждением достоверности предложенных нелинейных моделей впитывания.

Литература

1. Роде А.А. Основы учения о почвенной влаге – Л.:Гидрометеоиздат, 1965, т.1, 664с.,1969, т.2,286с.

2. П.Я. Полубаринова - Кочина и др. Математические методы в вопросах орошения, М.: Наука 1969, 414 с.

3. Будаговский А.И. Впитывание воды в почву–М.:Наука,1955,140с.

4. Саттаров М.А.,Юлдашев И. О нелинейных моделях одномерной вертикальной фильтрации воды в почвогрунтах.–Душанбе,Докл АН Тадж. ССР, 1980,т.23,№11, с.629–633.

Именной указатель